Achter Artikel.

# Über die transzendenten Aufgaben, insbesondere über die Quadratur des Kreises

von Benedetto Calò in Neapel.

**§ 1. Algebraische und transzendente Aufgaben.** In dem vierten und dem fünften Artikel sind vom Standpunkte der analytischen Geometrie und der Algebra aus die Fragen studiert worden, die sich auf die Möglichkeit beziehen, die geometrischen Aufgaben elementar, d. h. mit dem Lineal und dem Zirkel, zu lösen.

Wenn eine Konstruktionsaufgabe vorliegt, so forme man sie vor allem in der Weise um, daß die Daten Punkte (z. B. in einer Ebene) sind und auch die unbekannten Elemente Punkte sind, die zu den gegebenen in vorgeschriebenen Beziehungen stehen.

Soll dann die vorgelegte Aufgabe elementar lösbar sein, so ist erforderlich und hinreichend, daß

a) die vorgeschriebenen Beziehungen sich durch algebraische Gleichungen ausdrücken lassen (d. h. daß die Aufgabe algebraisch ist),

b) die in Rede stehenden algebraischen Gleichungen durch rationale Operationen und durch das Ausziehen von Quadratwurzeln sich lösen lassen (wenn man von den Koordinaten der gegebenen Punkte ausgeht).

Die Untersuchungen über die Möglichkeit, eine algebraische Gleichung in der vorgenannten Weise (mit quadratischen Irrationalitäten) zu lösen, haben in dem fünften, sechsten und siebenten Artikel ihren Platz gefunden.

Wir wollen uns hier der ersten Gruppe von Untersuchungen zuwenden, die zum Ziele haben, über den algebraischen Charakter oder im Gegensatz dazu über die Transzendenz einer gegebenen Aufgabe zu entscheiden. Und wir wollen gleich bemerken, daß die transzendenten Aufgaben insofern als etwas Höheres als die algebraischen anzusehen sind, als ihre Lösung nicht nur mit Geraden und

Kreisen (Lineal und Zirkel) nicht zu erhalten ist, sondern auch nicht bei Verwendung höherer algebraischer Kurven (wie der im siebenten Artikel benutzten) oder mit Hilfe von Instrumenten, mit denen man solche Kurven beschreiben kann.

Wir nehmen zum Ausgangspunkte unserer Betrachtungen die klassische Aufgabe der Quadratur des Kreises.

Bringen wir zunächst diese Aufgabe in eine analytische Form.

Wenn wir mit $r$ den Radius eines Kreises, mit $d$ seinen Durchmesser, mit $c$ seinen Umfang und mit $a$ seine Fläche bezeichnen, so haben wir:

$$c = \pi d = 2\pi r \tag{1}$$

$$a = \pi r^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2 = \tfrac{1}{2} r c, \tag{2}$$

wo $\pi$ das konstante Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser bezeichnet.

Aus der Formel (2) geht die bekannte Tatsache hervor, daß die Fläche des Kreises der Fläche eines Dreiecks gleich ist, das den Umfang des Kreises zur Basis und seinen Radius zur Höhe hat. Wenn wir also imstande sind, ausgehend vom Radius, mit dem Lineal und dem Zirkel eine Strecke zu konstruieren, die dem Umfange gleich ist, d. h. wenn wir die Rektifikation des Kreises elementar ausführen können, so werden wir das genannte Dreieck konstruieren und dieses dann, immer unter Benutzung von Lineal und Zirkel, leicht in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln können. Und umgekehrt, wenn man mit Hilfe einer elementaren Konstruktion den Kreis in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln könnte, so würde man durch eine darauffolgende Verwandlung dieses Quadrats in ein Dreieck, das den Radius des Kreises zur Höhe hat, durch eine elementare Konstruktion die Rektifikation des Kreises erhalten.

Die Aufgabe der Quadratur des Kreises ist also auf die der Rektifikation des Kreisumfanges zurückgeführt. Und wenn wir, der Einfachheit wegen, das Maß des Durchmessers zur Einheit wählen, so kommt diese letzte Aufgabe auf die andere zurück, eine Strecke von der Länge $\pi$ zu konstruieren (oder kurz $\pi$ zu *konstruieren*), wenn man von der Einheitsstrecke ausgeht.

Es ist klar, daß man der Strecke selbst eine vorgeschriebene Lage geben kann, so daß die Aufgabe damit in die Form gebracht ist, in der wir jede Konstruktionsaufgabe betrachten wollten, in die Form nämlich, daß die Daten Punkte sind (der Mittelpunkt [0, 0] und der Punkt des Kreises [0, 1]) und die unbekannten Elemente ihrerseits auch Punkte sind (z. B. der Punkt [0, $\pi$]).

Aber wenn die Aufgabe in dieser Weise gestellt wird, so ist nicht zu ersehen, ob sie von der Auflösung einer algebraischen Gleichung abhängt oder nicht, da in der Tat dabei keine aufzulösende Gleichung, von der $\pi$ eine Wurzel ist, zum Vorschein kommt.

Versuchen wir die Aufgabe, von der wir ausgegangen sind, zu verallgemeinern, indem wir die Frage der Rektifikation irgend eines Kreisbogens betrachten.

Von dem Bogen können wir (abgesehen von dem Radius, der wie vorhin als Einheit angenommen sei) die Sehne oder den Sinus als gegeben betrachten, was für unseren Zweck gleichwertig ist.

Die Aufgabe der Rektifikation des Bogens hängt dann von der Auflösung der Gleichung

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

ab.

Und da dies eine transzendente, d. h. nicht algebraische, Gleichung ist, so ist die Aufgabe im allgemeinen transzendent, und es ist daher nicht möglich, eine bestimmte allgemeine algebraische und noch viel weniger eine elementare (d. h. mit dem Lineal und dem Zirkel ausführbare) Konstruktion anzugeben, durch die man, wenn die Sehne (oder der Sinus) des Bogens gegeben ist, die Länge des Bogens erhalten kann.

Wenn z. B. eine bestimmte elementare Konstruktion im allgemeinen möglich wäre, so würde man einen bestimmten, aus rationalen Operationen und Quadratwurzeln gebildeten Ausdruck von $x$ finden, der für alle Werte von $x$ ein $y$ liefern würde. Dann würde $y$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung sein, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $x$ sein würden (vgl. Art. V), d. h. $y$ würde eine algebraische Funktion von $x$ sein. Nun kann eine transzendente Funktion wie $y = \operatorname{arc} \sin x$ (die, als Funktion eines komplexen Arguments, unendlich viele Zweige hat) sicherlich nicht einer algebraischen Funktion gleichwertig sein.

Aber wenn es unmöglich ist, in algebraischer und a fortiori in elementarer Weise die allgemeine Lösung der Aufgabe der Rektifikation des Kreises anzugeben, so folgt daraus nicht von vornherein, daß man die Lösung nicht erhalten könnte, indem man entweder für jede vorgeschriebene Sehne (oder jeden vorgeschriebenen Sinus) eine besondere algebraische oder elementare Konstruktion findet, die den Bogen liefert, oder indem man eine solche Konstruktion für besondere Bogen findet, z. B. dann, wenn die Sehne (oder der Sinus) des zu rektifizierenden Bogens durch

rationale Operationen und Quadratwurzeln aus dem Radius ausgedrückt und daher selbst elementar konstruierbar ist; im besondern in dem Falle, der der Rektifikation des ganzen Kreises entspricht. Und in der Tat, wenn die Kurve $y = \arcsin x$ transzendent ist und daher nicht ganz mit einer algebraischen Kurve zusammenfallen kann, wer sagt uns, daß nicht die Koordinaten jedes ihrer Punkte einer besonderen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten (die von Punkt zu Punkt variiert) genügen, oder daß diese Kurve wenigstens besondere Punkte enthält, deren Koordinaten einer solchen Gleichung genügen, und im speziellen Punkte, die zu Koordinaten quadratische irrationale Ausdrücke haben, denen gerade rektifizierbare Bogen entsprechen würden?

Wer versichert uns, daß der Punkt $[0, \pi]$ dieser Kurve sich nicht unter den erwähnten besonderen Punkten befindet?

Diese Frage tritt, wie man sieht, aus dem Bereiche der Funktionenlehre heraus, um in das Gebiet der Arithmetik einzutreten.

Wenn wir den Schlüssen, die aus der vorstehenden Erörterung hervorgehen, eine allgemeinere Form geben, so können wir sagen:

Die Untersuchung, um zu entscheiden, ob eine vorgeschriebene Aufgabe algebraisch oder transzendent ist, stellt sich als verschieden dar, je nachdem man eine Aufgabe betrachtet, deren Daten variabel oder fest sind. In dem ersten Fall ist, wenn die Gleichungen, die die Unbekannten mit den Daten verbinden, transzendent sind, die Aufgabe transzendent und eine allgemeine algebraische, unabhängig von den Werten der Daten gültige Lösung unmöglich.

Wenn es sich um eine Aufgabe handelt, in der die Daten fest sind, oder wenn (was dasselbe ist) die Daten zwar variieren können, aber als in besonderer Weise festgelegt betrachtet werden, so muß man sich fragen, ob die transzendenten Gleichungen, die die Unbekannten mit den Daten verbinden, soweit sie zur Bestimmung der Unbekannten dienen, nicht durch algebraische Gleichungen ersetzt werden können.

Betrachtet man die Dinge von diesem letzten Gesichtspunkte aus, so kann geradezu die Existenz der (arithmetich) transzendenten Aufgaben in Zweifel gezogen werden. Dieser Zweifel ist mit der Frage verknüpft:

Gibt es (transzendente) Zahlen, die keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen?

Erst dann, wenn wir diese Frage bejahend beantwortet haben (im § 3), werden wir uns derjenigen zuwenden, von der die Quadratur des Kreises abhängt:

Muß die Zahl $\pi$ unter die transzendenten Zahlen gesetzt werden?

Wir wollen sogleich sagen, daß auch die Antwort auf diese zweite Frage bejahend ist (§§ 4, 5, 6); sie schließt die Ära der fruchtlosen Versuche, auf elementare Weise die Quadratur des Kreises zu suchen, ab, indem sie zeigt, daß die Aufgabe selbst weder elementar, d. h. mit Geraden und Kreisen, noch durch das Beschreiben höherer algebraischer Kurven lösbar ist.

Im § 6 findet sich dann noch die Ausdehnung dieser Resultate auf die allgemeine Aufgabe der Rektifikation des Bogens.

Wir haben ferner im § 7 eine kurze Beschreibung des Integraphen von Abdank-Abakanowicz und der von ihm gelieferten graphischen Lösung der Aufgabe der Rektifikation und Quadratur des Kreises gegeben, und im § 8 werden einige der gewöhnlicheren elementaren Konstruktionen zur annähernden Lösung derselben Aufgabe angeführt. Der § 9 ist der Betrachtung einiger von Kreisbogen begrenzter und elementar quadrierbarer Flächen gewidmet. Im § 10 haben wir in einem historischen Überblick die Hauptuntersuchungen über die Aufgabe der Quadratur des Kreises kurz zusammengefaßt, und mit dem § 11 schließen wir diesen Artikel ab, indem wir den Beweis der Transzendenz von $e$ und $\pi$ in der einfachsten und elementarsten Form, auf die er durch neueste Untersuchungen gebracht worden ist, darlegen.

**§ 2. Grundeigenschaften der algebraischen Zahlen.** Wir bezeichnen mit Kronecker als algebraische Zahl jede Zahl $x$, die eine Wurzel einer algebraischen Gleichung von der Form

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten ist, einer Gleichung also, die durch Multiplikation mit einer geeigneten ganzen Zahl immer auf eine andere mit ganzen Koeffizienten zurückgeführt werden kann.

Wir bemerken sofort, daß bei dieser Definition die Wurzeln solcher algebraischer Gleichungen, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind, nicht ausgeschlossen sind, d. h. daß die gegebene Definition der algebraischen Zahl so allgemein wie möglich ist; dies geht aus dem folgenden Satze hervor:

Jede Wurzel einer algebraischen Gleichung mit algebraischen Koeffizienten ist auch eine Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten.

Und in der Tat, es sei die Zahl $w$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \cdots + \gamma = 0, \tag{1}$$

wo $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ algebraische Zahlen sind, d. h. Wurzeln von Gleichungen der folgenden Form:

$$\left.\begin{array}{l} x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \cdots + A_a = 0 \\ x^b + B_1 x^{b-1} + B_2 x^{b-2} + \cdots + B_b = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^c + C_1 x^{c-1} + C_2 x^{c-2} + \cdots + C_c = 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

in denen die Koeffizienten sämtlich rationale Zahlen sind.

Wir bezeichnen mit $p$ das Produkt $n \cdot a \cdot b \cdots c$ und mit $w_1, w_2, \ldots, w_p$ alle Produkte der Form

$$w^{n'} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'} \left\{ \begin{array}{l} n' = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ a' = 0, 1, 2, \ldots, a-1 \\ b' = 0, 1, 2, \ldots, b-1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c' = 0, 1, 2, \ldots, c-1, \end{array}\right.$$

die gerade in der Zahl $p$ vorhanden sind.

Es ist dann leicht zu erkennen, daß die $p$ Produkte $ww_1, ww_2, \ldots ww_p$ sich in folgender Weise ausdrücken lassen:

$$ww_i = k_{i1} w_1 + k_{i2} w_2 + \cdots + k_{ip} w_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

wo die Zahlen $k_{rs}$ sämtlich rational sind.

Wir haben in der Tat

$$ww_i = w^{n'+1} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'}.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1) Es sei $n' < n - 1$; dann ist $n' + 1 < n$, und daher ist $ww_i$ einer der $p$ Größen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ gleich.

2) Es sei $n' = n - 1$; dann ist $n' + 1 = n$, und daher $w^{n'+1} = w^n$; aber, da $w$ eine Wurzel der Gleichung (1) ist, so besteht die Identität:

$$w^n = -\alpha w^{n-1} - \beta w^{n-2} - \cdots - \gamma,$$

so daß also

$$\left.\begin{array}{l} ww_i = -w^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'} \\ \quad - w^{n-2} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'+1} \cdots \gamma^{c'} - \cdots - \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'+1} \end{array}\right\} \tag{3}$$

ist. Betrachten wir nun das erste Glied auf der rechten Seite, nämlich

$$w^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'}. \tag{4}$$

Wir können wiederum zwei Fälle unterscheiden:

Entweder ist $a' < a - 1$, und dann ist $a' + 1 < a$, und daher das Glied selbst gleich einer der $p$ Größen $w_1, w_2, \ldots, w_p$.

Oder es ist $a' = a - 1$, und dann $a' + 1 = a$, und daher $\alpha^{a+1} = \alpha^a$; aber, da $\alpha$ eine Wurzel der ersten der Gleichungen (2) ist, so besteht die Identität

$$\alpha^a = -A_1 \alpha^{a-1} - A_2 \alpha^{a-2} - \cdots - A_a.$$

Setzt man diesen letzten Ausdruck in das Glied (4) an Stelle von $\alpha^{a+1}$ ein, so wird das Glied selbst eine homogene lineare Funktion von einer Anzahl (nämlich $a$) der $p$ Größen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ mit rationalen Koeffizienten.

Da man nun dasselbe für jedes Glied der rechten Seite von (3) wiederholen kann, so wird auch $ww_i$ eine homogene lineare Funktion der $p$ Größen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ mit rationalen Koeffizienten (die Null eingeschlossen) sein.

Es werden also $p$ Gleichungen von folgender Form bestehen:

$$\begin{aligned} ww_1 &= k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + \cdots + k_{1p} w_p, \\ ww_2 &= k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + \cdots + k_{2p} w_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ww_p &= k_{p1} w_1 + k_{p2} w_2 + \cdots + k_{pp} w_p, \end{aligned}$$

in denen die Koeffizienten $k_{rs}$ sämtlich rationale Zahlen sind. Nun können diese Gleichungen in folgender Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} (k_{11} - w) w_1 + k_{12} w_2 + \cdots + k_{1p} w_p &= 0, \\ k_{21} w_1 + (k_{22} - w) w_2 + \cdots + k_{2p} w_p &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{p1} w_1 + k_{p2} w_2 + \cdots + (k_{pp} - w) w_p &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, da die Größen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ nicht sämtlich Null sein können, daß die Zahl $w$ eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} k_{11} - w & k_{12} & \cdots & k_{1p} \\ k_{21} & k_{22} - w & \cdots & k_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{p1} & k_{p2} & \cdots & k_{pp} - w \end{vmatrix} = 0$$

sein muß, und dies ist eine algebraische Gleichung vom Grade $p$ in $w$ mit rationalen Koeffizienten, die, mit einer geeigneten ganzen Zahl multipliziert, auf ganze Koeffizienten gebracht werden kann. Also ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Ein anderer Satz, von dem wir häufig Gebrauch machen werden, ist folgender:

Wenn $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ algebraische Zahlen sind, so ist auch jede Zahl, die durch rationale Operationen aus ihnen gebildet wird, eine algebraische Zahl.

Es ist nur zu zeigen, daß, wenn $\alpha$ und $\beta$ algebraische Zahlen sind, auch die Ausdrücke $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ algebraische Zahlen sind.

Wir bemerken zunächst, daß aus der Definition der algebraischen Zahl unmittelbar folgt, daß, wenn $\alpha$ eine algebraische Zahl ist, auch $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha + 1$, $\alpha - 1$ algebraische Zahlen sind.

Wenden wir nun den im Vorstehenden bewiesenen Satz auf die lineare Gleichung

$$\beta x + \alpha = 0,$$

in der $\alpha$ und $\beta$ algebraische Koeffizienten sind, an, so ergibt sich, daß $-\frac{\alpha}{\beta}$ und daher auch $\frac{\alpha}{\beta}$ algebraisch ist: wenn aber $\beta$ algebraisch ist, so ist auch $\frac{1}{\beta}$ algebraisch und daher auch $\alpha : \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta$. Nun sind auch $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ und $\frac{\alpha}{\beta} - 1$ algebraisch und daher auch:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \cdot \beta = \alpha + \beta, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot \beta = \alpha - \beta.$$

Also ist der Satz bewiesen, der übrigens auch unabhängig von dem vorhergehenden Satze dargetan werden kann.[1])

**§ 3. Beweis der Existenz transzendenter Zahlen.** In diesem Paragraphen werden wir uns mit der ersten der im § 1 aufgestellten Fragen beschäftigen, mit der Frage nämlich, ob es Zahlen gibt, die nicht Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind. Der erste, der die Existenz solcher sogenannter transzendenter Zahlen bewiesen hat, ist Liouville. Der von ihm gegebene Beweis, den wir in etwas modifizierter Form hier wiedergeben werden, erschien zuerst ganz kurz in den Comptes rendus vol. 18 (1844), pg. 883 und 910, und dann breiter im Journal de Liouville vol. 16 (1851), pg. 133, unter folgendem Titel: Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationelles algébriques.

1) Die beiden bewiesenen Sätze verdankt man Dedekind; vgl. das XI. Supplement zu den Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet, 4 Aufl., Braunschweig 1894.

Wir beginnen damit, eine numerische Eigentümlichkeit nachzuweisen, die jede reelle und positive algebraische Zahl darbietet, wenn sie in einen Kettenbruch entwickelt wird. Es sei $x_0$ irgend eine irrationale algebraische Zahl, d. h. eine Wurzel einer Gleichung von der Form:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

mit ganzen Koeffizienten (vgl. § 2). Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, können wir voraussetzen, daß die Wurzeln dieser Gleichung sämtlich verschieden sind; und in der Tat, wenn sie Wurzeln hätte, die einander gleich sind, so brauchten wir ihre linke Seite nur durch den größten Teiler, der ihr und ihrer Ableitung gemeinsam ist, zu dividieren, um zu erreichen, daß unsere Voraussetzung verwirklicht ist.

Wir setzen nun voraus, daß die Zahl $x_0$ reell und positiv und in folgender Weise in einen Kettenbruch entwickelt sei:

$$x_0 = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cdots + \cfrac{1}{p_{k-1} + \cdots}}},$$

wo $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, \ldots$ positive ganze Zahlen bedeuten; und es sei $r_k$ der Rest der Entwicklung, wenn man den Kettenbruch bei dem Nenner $p_{k-1}$ abbricht; es wird dann auch $r_k$ eine positive und reelle algebraische Zahl sein (vgl. § 2), und $p_k$ wird die größte ganze Zahl sein, die in $\frac{1}{r_k}$ enthalten ist.

Wenn wir im allgemeinen mit

$$\frac{c_k}{c'_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

den Näherungsbruch bezeichnen, den man erhält, wenn man die Kettenbruchentwicklung bei dem Nenner $p_{k-1}$ abbricht, so haben wir nach dem bekannten Bildungsgesetze der Näherungsbrüche

$$\frac{c_k}{c'_k} = \frac{c_{k-1} p_{k-1} + c_{k-2}}{c'_{k-1} p_{k-1} + c'_{k-2}},$$

und wenn wir für $p_{k-1}$ in diesem Ausdrucke $p_{k-1} + r_k$ einsetzen, so erhalten wir

$$x_0 = \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}}.$$

Also haben wir

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 = \frac{c_k}{c'_k} - \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}} = \frac{r_k(c_k c'_{k-1} - c'_k c_{k-1})}{c'_k(c'_k + r_k c'_{k-1})}$$

d. h.

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 = \frac{(-1)^k \cdot r_k}{c'_k(c'_k + r_k c'_{k-1})}. \tag{2}$$

Andererseits können wir, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die anderen $n-1$ Wurzeln der Gleichung (1) sind, die nach Voraussetzung sämtlich untereinander und von $x_0$ verschieden sind, schreiben:

$$f(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Wenn wir in diesem Ausdrucke für $x$ den Wert $\frac{c_k}{c'_k}$ einsetzen, so erhalten wir:

$$f\left(\frac{c_k}{c'_k}\right) = a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \ldots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right)$$
$$= \frac{a_0 c_k^n + a_1 c_k^{n-1} c'_k + \cdots + a_{n-1} c_k c'^{\,n-1}_k + a_n c'^{\,n}_k}{c'^{\,n}_k}.$$

Da aber die Zahlen $a, c, c'$ sämtlich ganze Zahlen sind, so können wir schreiben:

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \ldots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right) = \frac{C}{c'^{\,n}_k},$$

wo $C$ ebenfalls eine ganze Zahl ist.

Nun nähert sich, wenn $k$ unbegrenzt wächst, die Größe $\frac{c_k}{c'_k}$ der Grenze $x_0$; also ist von einem gewissen Werte des $k$ an $\frac{c_k}{c'_k}$ immer von $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ verschieden und absolut genommen kleiner als eine gewisse endliche positive Größe; daher ist von einem gewissen Werte von $k$ an die ganze Zahl $C$ von Null verschieden und also absolut genommen größer oder gleich 1, und andrerseits der Ausdruck

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \ldots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right)$$

absolut genommen kleiner als eine gewisse endliche positive Zahl $l$. Daher ist, absolut genommen,

$$\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right) l > \frac{1}{c'^{\,n}_k}$$

oder

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_0 > \frac{1}{l\,c'^{\,n}_k}.$$

Und wenn wir nun die Gleichung (2) berücksichtigen, so erhalten wir:

$$\frac{r_k}{c'_k(c'_k + r_k c'_{k-1})} > \frac{1}{l c'^n_k},$$

oder

$$\frac{c'_k + r_k c'_{k-1}}{r_k} < l c'^{n-1}_k,$$

und, da $c'_k$, $c'_{k-1}$ und $r_k$ positive Größen sind:

$$\frac{1}{r_k} < l c'^{n-2}_k,$$

und, da $p_k$ die größte in $\frac{1}{r_k}$ enthaltene ganze Zahl ist, so erhalten wir schließlich:

$$p_k < l c'^{n-2}_k. \tag{3}$$

Diese Ungleichheit stellt die arithmetische Eigentümlichkeit der algebraischen Zeit $x_0$ dar, die wir nachweisen wollten; sie läßt sich so in Worte fassen:

Wenn man eine positive reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung vom Grade $n(> 1)$ mit ganzen Koeffizienten und ungleichen Wurzeln in einen Kettenbruch entwickelt, so ist jeder Teilnenner dieses Kettenbruches nicht größer als das Produkt einer gewissen endlichen positiven konstanten Größe $l$ mit der $(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz des Nenners des vorhergehenden Näherungsbruches.

Wenn wir also imstande sein sollten, einen Kettenbruch von der Form

$$p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cdots}}$$

mit positiven ganzen Teilnennern zu konstruieren, für den die Bedingung (3) von einem gewissen Werte von $k$ ab, was auch die Werte der Konstanten $l$ und der ganzen Zahl $n$ sein mögen, nicht erfüllt ist, so wird die durch diesen Kettenbruch dargestellte Zahl keine Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten und ungleichen Wurzeln und daher auch keine Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten (vgl. § 2) sein; sie wird also eine transzendente Zahl sein.

Nun kann man einen Kettenbruch von dieser Art tatsächlich konstruieren; man braucht dazu z. B. nur jeden Teilnenner $p_k$ so zu bilden, daß er mit dem vorhergehenden in der Beziehung steht:

$$p_k = c_k'^k \ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

In der Tat wird dann, welche Werte auch $n$ und $l$ haben mögen, die wachsende Zahl $k$ einmal größer sein als $n$; aber mit wachsendem $k$ nimmt bekanntlich auch die Zahl $c_k'$ unbegrenzt zu: also können wir behaupten, daß von einem gewissen Werte von $k$ ab

$$k > n, \quad c_k'^2 > l$$

sein wird: infolge der ersten dieser Ungleichheiten wird

$$p_k > c_k'^2 \cdot c_k'^{n-2}$$

sein, und infolge der zweiten werden wir a fortiori haben:

$$p_k > l \cdot c_k'^{n-2}.$$

Da man also, welche Werte auch $l$ und $n$ haben mögen, einen Wert von $k$ finden kann von der Art, daß von jenem Werte ab die Ungleichheit (3) niemals erfüllt ist, so wird die durch den so konstruierten Kettenbruch dargestellte Zahl eine transzendente Zahl sein.

Man bemerke, daß man zu demselben Schlusse gelangen würde, wenn man

$$p_k > c_k'^k \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

nähme; aus dieser Willkür geht die Möglichkeit hervor, unendlich viele transzendente Zahlen zu konstruieren, und damit ist der Liouvillesche Satz bewiesen.

Aus den klassischen Untersuchungen von G. Cantor[1]) über die Menge der algebraischen Zahlen geht ein neuer Beweis der Existenz transzendenter Zahlen hervor, der viel einfacher und natürlicher ist als der von Liouville gegebene.

Wir wollen hier den Cantorschen Beweis wiedergeben, indem wir uns an die einfache Darlegung dieses Beweises halten, die F. Klein gegeben hat.[2])

Man nennt eine Menge von unendlich vielen Elementen (z. B. Zahlen) abzählbar, wenn ihre Elemente den Zahlen der natürlichen Reihe 1, 2, 3, ... umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. Das heißt: eine Menge von Elementen heißt abzählbar, wenn ihre Elemente sich nach irgend einem Gesetze in eine Auf-

1) Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. J. f. Math. 77 (1873).

2) Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig 1895.

einanderfolge bringen lassen, in der jedes von ihnen einen bestimmten numerierten Platz inne hat.

Wir können nun beweisen, daß die Gesamtheit der reellen algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge bildet, d. h. wir können den Satz beweisen:

Die Gesamtheit der reellen algebraischen Zahlen und die der positiven ganzen Zahlen können in eine umkehrbar eindeutige Beziehung zueinander gesetzt werden.

Man erhält alle reellen algebraischen Zahlen, wenn man alle reellen Wurzeln aller irreduziblen Gleichungen von der Form

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

bestimmt, wobei man immer voraussetzen kann, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und $a_0$ von Null verschieden und positiv ist.

Wir wollen nun als Höhe einer algebraischen Zahl, also einer Wurzel der vorstehenden Gleichung, die Summe

$$(4) \qquad N = (n-1) + a_0 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

bezeichnen, wo unter $|a_\nu|$ der absolute Wert von $a_\nu$ zu verstehen ist. Dann ist einleuchtend, daß zu jedem Werte, den man $N$ beilegt, nur eine endliche Zahl algebraischer Zahlen gehört. Denn nach (4) kann in der Tat $n$ nicht größer als $N$ sein, und sind $N$ und $n$ einmal festgelegt, so können die Zahlen $a_0, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$ als positive ganze Zahlen nur in einer endlichen Zahl von Arten bestimmt werden, so daß zu einem Werte, den man $N$ beilegt, nur eine endliche Zahl von Gleichungen gehört, und von diesen brauchen nur die irreduziblen betrachtet zu werden; also gehört zu einem gegebenen Werte von $N$ nur eine endliche Zahl algebraischer Zahlen.

Die reellen algebraischen Zahlen werden daher in Gruppen nach ihrer wachsenden Höhe geordnet werden können, und die (in endlicher Zahl vorhandenen) einer jeden Gruppe, die also dieselbe Höhe haben, werden nach ihrer Größe geordnet werden können; so werden alle reellen algebraischen Zahlen in eine Aufeinanderfolge gebracht werden können, in der jede einen bestimmten Platz hat; also bilden die reellen algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge, w. z. b. w.

Rechnet man für die ersten Werte von $N$ die zugehörigen algebraischen Zahlen $w$ (auf fünf Stellen) aus, so erhält man folgenden Anfang der Tabelle der algebraischen Zahlen:

| $N$ | $w$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | $-1$ |
| | $+1$ |
| 3 | $-2$ |
| | $-\frac{1}{2}$ |
| | $+\frac{1}{2}$ |
| | $+2$ |

| $N$ | $w$ |
|---|---|
| 4 | $-3$ |
| | $-1{,}618\,03$ |
| | $-1{,}414\,21$ |
| | $-0{,}707\,11$ |
| | $-0{,}618\,03$ |
| | $-0{,}333\,33$ |
| | $+0{,}333\,33$ |
| | $+0{,}618\,03$ |
| | $+0{,}707\,11$ |
| | $+1{,}414\,21$ |
| | $+1{,}618\,03$ |
| | $+3$ |

Ist nun irgend eine abzählbare Menge reeller Zahlen gegeben und betrachtet man alle reellen Zahlen, die durch die Punkte eines beliebig kleinen Stückes der Abszissenachse dargestellt werden, so können wir beweisen, daß es unter diesen Zahlen unendlich viele gibt, die der gegebenen abzählbaren Menge nicht angehören.

Zu dem Ende denken wir die Zahlen dieser abzählbaren Menge als Dezimalbrüche geschrieben, und wenn einer dieser Brüche in eine unendliche Reihe von Neunen auslaufen sollte, so wollen wir dahin übereinkommen, daß für diesen unendlichen Dezimalbruch immer der gleichwertige abbrechende Dezimalbruch gesetzt werden soll.

Nun kann man leicht eine reelle Zahl bilden, die der betrachteten Menge nicht angehört, wie eng man auch die Grenzen wählen mag, zwischen denen diese Zahl liegen soll. Denn wenn diese Grenzen etwa dadurch bestimmt sind, daß von der Zahl die ersten fünf Dezimalstellen gegeben sind, so braucht man nur als sechste Dezimale eine Zahl zu nehmen, die von 9 und von der sechsten Dezimale der ersten Zahl jener abzählbaren Menge verschieden ist, dann als siebente Dezimale eine Zahl, die von 9 und der siebenten Dezimale der zweiten Zahl jener abzählbaren Menge verschieden ist, usw. Die so konstruierte Zahl kann offenbar jener abzählbaren Menge nicht angehören, und da man zur Bestimmung jeder einzelnen Dezimale die Wahl zwischen acht Zahlen hat, so ergibt sich, daß in jedem noch so kleinen Intervalle der Abszissenachse sich unendlich viele ($8^{\infty}$) Zahlen befinden, die jener abzählbaren Menge nicht angehören.

Nimmt man also als abzählbare Menge die der reellen algebraischen Zahlen, so ist der Beweis geführt, daß es in jedem noch so kleinen reellen Bereiche unendlich viele transzendente Zahlen gibt.

**§ 4. Der Weierstraßsche Hilfssatz.** Wir müssen nun die andere im § 1 aufgeworfene Frage, von der, wie wir gesehen haben,

die Möglichkeit, die Aufgabe der Quadratur des Kreises auf elementare Weise zu lösen, abhängt, betrachten; es handelt sich also darum, ob die Zahl $\pi$ unter die algebraischen oder unter die transzendenten Zahlen zu setzen ist. Diese Frage ist im Jahre 1882 von Lindemann[1]) entschieden worden, der, von den Untersuchungen ausgehend, durch die im Jahre 1873 Hermite[2]) die Transzendenz der Zahl $e$ (der Basis der natürlichen Logarithmen) dargetan hatte, den Beweis führte, daß auch die Zahl $\pi$ transzendent ist.

Der Lindemannsche Beweis wurde dann von Weierstraß[3]) erheblich vereinfacht und so weit verallgemeinert, daß ein allgemeinerer schon von Lindemann ausgesprochener Satz damit bewiesen wurde. Aus diesem allgemeinen Satze geht nicht nur die Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$ hervor, sondern auch, wie Weierstraß hervorgehoben hat, die Transzendenz jedes Kreisbogens, dessen Sehne durch den Radius algebraisch ausgedrückt ist, so daß also die Frage, ob die Rektifikation des Kreises oder irgend eines Kreisbogens elementar ausführbar ist, damit gelöst ist.

Wir beginnen mit dem Beweise eines Hilfssatzes, von dem Weierstraß ausgeht, um die Transzendenz von $\pi$ und den allgemeinen Lindemannschen Satz zu beweisen.

Es seien $f(z)$, $h(z)$ zwei Polynome der Variablen $z$ von den Graden $n+1$ und $n$:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_n z + a_{n+1}, \\ h(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0; \end{cases}$$

das Polynom $f(z)$ sei so gewählt, daß die Gleichung $f(z) = 0$ nur ungleiche Wurzeln hat; die Koeffizienten von $h(z)$ dagegen mögen ganz willkürlich sein.

Wir bilden aus diesen beiden Polynomen die Funktion vom Grade $\mu = n + m(n+1)$:

$$(2)\qquad F(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!} \quad (m \text{ eine positive ganze Zahl})$$

und betrachten die Funktion

$$(3)\qquad \varphi(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \cdots + F^{(\mu)}(z),$$

wo die $F'(z)$, $F''(z)$ usw. die Ableitungen von $F(z)$ bedeuten.

Die Funktion $\varphi(z)$ ist von demselben Grade wie $F(z)$, d. h. vom

1) Über die Ludolphsche Zahl, Berl. Ber. 1882.
2) Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus, vol. 77.
3) Zu Lindemanns Abhandlung „Über die Ludolphsche Zahl“, Berl. Ber. 1885.

Grade $\mu = n + m(n+1)$. Wenn wir die Gleichung (3) nach $z$ differentiieren und uns gegenwärtig halten, daß $F^{(\mu+1)}(z) = 0$ ist, so erhalten wir

$$\varphi'(z) = F'(z) + F''(z) + F'''(z) + \cdots + F^{\mu}(z),$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von der Gleichung (3) ergibt sich

$$\varphi(z) - \varphi'(z) = F(z)$$

oder, wegen (2),

$$\varphi(z) - \varphi'(z) = \frac{h(z)f(z)^m}{m!}. \tag{4}$$

Wir setzen nun voraus, daß die Koeffizienten $c_i$ von $h(z)$ nicht sämtlich Null sind, d. h. daß $h(z)$ nicht identisch Null ist; daraus folgt, daß auch $\varphi(z)$ nicht identisch Null sein kann. Und es kann $\varphi(z)$ auch nicht $f(z)$ als Faktor enthalten, denn sonst könnten wir

$$\varphi(z) = \Theta(z) \cdot f(z)^{\varrho}$$

setzen, wo $\Theta(z)$ ein durch $f(z)$ nicht teilbares Polynom in $z$ bezeichnet und $\varrho < m + 1$ ist. Dies aber ist unmöglich, weil dann die Gleichung (4) die Form

$$\{\Theta(z) - \Theta'(z)\}\, f(z)^{\varrho} - \varrho \cdot \Theta(z) \cdot f(z)^{\varrho-1} \cdot f'(z) = \frac{h(z)f(z)^m}{m!}$$

oder

$$\{\Theta(z) - \Theta'(z)\}\, f(z) - \varrho \cdot \Theta(z) \cdot f'(z) = \frac{h(z)f(z)^{m-\varrho+1}}{m!}$$

annehmen würde und dann das Glied $\varrho \cdot \Theta(z) \cdot f'(z)$ durch $f(z)$ teilbar sein müßte; aber es wurde vorausgesetzt, daß $\Theta(z)$ durch $f(z)$ nicht teilbar ist, und $f'(z)$ kann mit $f(z)$ keinen Faktor gemeinsam haben, da die Gleichung $f(z) = 0$ nach Voraussetzung nur ungleiche Wurzeln hat. Also kann $\varrho \cdot \Theta(z) \cdot f'(z)$ nicht durch $f(z)$ teilbar sein, und daher ist auch $\varphi(z)$ nicht durch $f(z)$ teilbar.

Nun bemerken wir, daß, wenn wir die Ableitungen von $F(z)$ nach $z$ bilden, die $m^{\text{te}}$ Ableitung die erste ist, die durch $f(z)$ nicht teilbar ist; sie wird als Summanden Glieder enthalten, die durch $f(z)$ teilbar sind, und als einziges Glied, das durch $f(z)$ nicht teilbar ist, das Glied $h(z)f'(z)^m$. Dieses Glied ist eine ganze rationale Funktion von

$$z,\ a_0,\ a_1, \ldots, a_{n+1},\ c_0, c_1, \ldots, c_n$$

mit ganzen Koeffizienten, in den Größen $c$ linear und homogen und in $z$ vom Grade $(m+1)n$. Ebenso werden in allen weiteren Ableitungen von $F(z)$ bis zur $\mu^{\text{ten}}$ die durch $f(z)$ nicht teilbaren Glieder ganze rationale Funktionen von

$$z,\ a_0,\ a_1,\ldots,a_{n+1},\ c_0,\ c_1,\ldots,c_n$$

mit ganzen Koeffizienten, linear und homogen in den Größen $c$ und nicht von höherem Grade als $(m+1)n$ in $z$ sein. Wenn wir also in dem durch (3) gegebenen Ausdrucke von $\varphi(z)$ alle Glieder, die den Faktor $f(z)$ enthalten, zusammenfassen, so können wir schreiben

$$\varphi(z) = K(z)\cdot f(z) + H(z), \tag{5}$$

wo $K(z)$ ein Polynom in $z$ und $H(z)$ eine ganze rationale Funktion von

$$z,\ a_0,\ a_1,\ldots,a_{n+1},\ c_0,\ c_1,\ldots,c_n$$

mit ganzen Koeffizienten, linear und homogen in den Größen $c$ und vom Grade $(m+1)n$ in $z$ ist; und es kann $H(z)$ nicht identisch Null sein, weil $\varphi(z)$ durch $f(z)$ nicht teilbar ist.

Jetzt multiplizieren wir $H(z)$ mit $a_0^{mn}$ und dividieren dann durch $f(z)$, wobei wir die algebraische Division so weit als möglich fortsetzen; wir erhalten dann als Quotienten ein Polynom in $z$ und als Rest eine ganze rationale Funktion in

$$z,\ a_0,\ a_1,\ldots,a_{n+1},\ c_0,\ c_1,\ldots,c_n$$

mit ganzen Koeffizienten, die in den Größen $c$ linear und homogen und in $z$ nicht von höherem Grade als $n$ ist. Daher kann man die Relation (5) in der Form

$$a_0^{mn}\varphi(z) = G(z)\cdot f(z) + g(z) \tag{6}$$

schreiben, wo $G(z)$ ein Polynom in $z$ ist und $g(z)$ die schon genannten Eigenschaften hat und überdies ebensowenig wie $H(z)$ identisch Null sein kann.

Endlich, da $g(z)$ in den Größen $c_0, c_1,\ldots,c_n$ linear und homogen ist, so können wir es als eine Summe von $n+1$ Gliedern in folgender Weise darstellen:

$$g(z) = \sum_0^n c_i g_i(z),$$

wo die $n+1$ Funktionen $g_i(z)$ ganze rationale Funktionen von $z,\ a_0,\ a_1,\ldots,a_{n+1}$ mit ganzen Koeffizienten und in $z$ von nicht höherem Grade als $n$ sind, und wir haben daher wegen (6)

$$a_0^{mn}\varphi(z) = G(z)\cdot f(z) + \sum_0^n c_i g_i(z). \tag{7}$$

Nun betrachten wir das unbestimmte Integral

$$\int e^{-z}F(z)\,dz.$$

Wenn wir $(n+1)$-mal hintereinander die sogenannte partielle Integration anwenden und uns erinnern, daß $F^{(n+1)}(z) = 0$ ist, so erhalten wir

$$\int e^{-z} F(z)dz = -e^{-z}\{F(z) + F'(z) + \cdots + F^{(n)}(z)\}$$

und wegen (3)

$$\int e^{-z} F(z)dz = -e^{-z}\varphi(z).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $a_0^{mn}$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Formeln (2) und (7)

$$\int \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} h(z)e^{-z}dz = -e^{-z}G(z)\cdot f(z) - e^{-z}\sum_0^n c_i g_i(z).$$

Es seien nun $z'$, $z''$ zwei Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, die nach Voraussetzung nur ungleiche Wurzeln hat. Integrieren wir in der letzten Formel längs irgend eines in der $z$-Ebene gelegenen Weges zwischen den Punkten $z'$, $z''$ und halten wir uns gegenwärtig, daß

$$f(z') = f(z'') = 0$$

ist, so erhalten wir

$$e^{-z''}\sum_0^n c_i g_i(z'') - e^{-z'}\sum_0^n c_i g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} h(z)e^{-z}dz.$$

Nun war

$$h(z) = \sum_0^n c_i z^i;$$

also ist die vorstehende Relation linear und homogen in den $c_i$, und da diese willkürlich sind, so zerfällt sie in die $n+1$ Gleichungen

$$(8)\quad e^{-z''}g_i(z'') - e^{-z'}g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{(a_0^n f(z))^m}{m!} z^i e^{-z}dz \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Die Zahl $m$ ist bis jetzt unbestimmt geblieben, und die Funktionen $g_i(z)$ hängen, wenn dies auch nicht ausdrücklich gesagt worden ist, auch von ihr ab.

Nun wollen wir zeigen, daß, wenn $m$ unbegrenzt wächst, der absolute Betrag der Integrale, die auf der rechten Seite der vorangehenden Gleichungen stehen, Null zur Grenze hat. In der Tat, es sei längs des Integrationsweges, dessen Länge wir mit $l$ bezeichnen wollen, $M$ der größte absolute Betrag von $z^i e^{-z}$ und $M'$ der größte absolute Betrag von $a_0^n f(z)$. Der absolute Betrag des Integrals bleibt dann

immer kleiner als $\frac{M \cdot M'^m}{m!} l$; aber, wenn $m$ unbegrenzt zunimmt, so hat die Größe $\frac{M'^m}{m!}$ zur Grenze Null, während $M$ und $l$ konstant bleiben. Daher hat auch der absolute Betrag des Integrals zur Grenze Null, und dasselbe wird also mit den Ausdrücken auf der linken Seite der Gleichungen (8) der Fall sein, auch dann, wenn man sie mit $e^{z'+z''}$ multipliziert.

Wir können also sagen, daß mit unbegrenzt wachsendem $m$ die Ausdrücke

$$e^{z'} \cdot g_i(z'') - e^{z''} \cdot g_i(z') \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

sich der Null nähern.

Darum kann man voraussetzen, daß die Zahl $m$ so groß gewählt worden ist, daß die absoluten Beträge aller vorstehenden Ausdrücke kleiner sind als eine beliebig klein gewählte positive Zahl $\sigma$.

Wenn wir jetzt mit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ alle Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ bezeichnen, die der Voraussetzung nach voneinander verschieden sind, und annehmen, daß die Koeffizienten der Gleichung selbst sämtlich ganze Zahlen sind, so folgt, daß auch die $n + 1$ Funktionen $g_i(z)$ ganze rationale Funktionen von $z$ mit ganzen Koeffizienten sind, und nach dem Vorhergehenden kann man für $m$ einen so großen Wert wählen, daß die absoluten Beträge der Ausdrücke

$$e^{z_k} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} g_i(z_k) \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \cdots, n \\ k = 0, 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

sämtlich kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl $\sigma$ sind.

Wir wollen nun zeigen, daß die $n + 1$ Funktionen $g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$ außer den schon nachgewiesenen Eigenschaften noch die folgende besitzen: Die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_0(z_0) g_1(z_0) \cdots g_n(z_0) \\ g_0(z_1) g_1(z_1) \cdots g_n(z_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_0(z_n) g_1(z_n) \cdots g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden.

In der Tat, wenn sie gleich Null wäre, so würden die $n + 1$ Relationen

$$\sum_0^n c_i g_i(z_k) = 0 \quad (k = 0\ 1, 2, \ldots, n)$$

für Werte der Größen $c_0, c_1, \ldots, c_n$, die nicht sämtlich Null sind, bestehen; daher müßte die Funktion

$$g(z) = \sum_{0}^{n} c_i g_i(z),$$

deren Grad in $z$ nicht größer als $n$ ist, für $n+1$ Werte von $z$ Null werden und also identisch Null sein, während dies, wie wir oben gezeigt haben, nicht der Fall ist.

Fassen wir zusammen, was wir in diesem Paragraphen bewiesen haben, so können wir den Weierstraßschen Hilfssatz in folgender Weise aussprechen:

Wenn $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von $z$ vom Grade $n+1$ mit ganzen Koeffizienten und den sämtlich voneinander verschiedenen Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist, so gibt es ein System von $n+1$ ganzen rationalen Funktionen von $z$

$$g_0(z),\ g_1(z), \ldots, g_n(z)$$

von nicht höherem Grade als $n$ und mit ganzen Koeffizienten von der Art, daß die Determinante der Größen $g_i(z_k)$ von Null verschieden ist und jede der Differenzen

$$e^{z_k} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_k) \quad \begin{pmatrix} i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, n \\ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

einen absoluten Betrag hat von geringerer Größe als eine beliebig klein gewählte positive Zahl $\sigma$.

## § 5. Beweis des allgemeinen Lindemannschen Satzes.

Gestützt auf den Hilfssatz des vorangehenden Paragraphen hat Weierstraß den allgemeinen Lindemannschen Satz bewiesen; wir werden nun diesen Beweis im Anschluß an die bereits zitierte Originalabhandlung wiedergeben.

Wir beginnen mit dem Beweise des folgenden Satzes, von dem wir dann durch successive Erweiterung leicht zum Beweise des allgemeinen Lindemannschen Satzes gelangen werden.

A) Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ die $\nu$ voneinander verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung

(1) $$x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu = 0$$

vom Grade $\nu$ mit rationalen Koeffizienten und $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ $\nu$ ganze Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null

verschieden ist, so ist die Summe $\sum_{\nu}^{1} N_i e^{x_i}$ von Null verschieden.

Wir setzen die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ in der Weise geordnet voraus, daß der reelle Teil irgend einer von ihnen nicht größer als der reelle Teil der vorhergehenden Zahlen ist; dabei kann sich ergeben, daß in der Reihe der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ eine Gruppe aufeinanderfolgender Zahlen mit gleichen reellen Teilen auftritt; dann wollen wir die Zahlen dieser Gruppe in der Weise geordnet denken, daß die Koeffizienten des imaginären Teiles abnehmen.

Unter diesen Voraussetzungen werden die Differenzen $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3, \ldots, x_{\nu-1} - x_\nu$, die man erhält, wenn man von irgend einer dieser Zahlen irgend eine der darauf folgenden subtrahiert, zum reellen Teile entweder eine positive Zahl oder die Zahl Null haben, und im letzten Falle wird der Koeffizient des imaginären Teiles positiv sein.

Daraus folgt, daß, wenn $a, b, \ldots, l$ irgendwie aus den $\nu$ Zahlen $1, 2, \ldots, \nu$ ausgewählte Zahlen und $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ebensoviele aus $1, 2, \ldots \nu$ ausgewählte Zahlen sind von der Art, daß

$$a \geq \alpha, \; b \geq \beta, \cdots l \geq \lambda$$

ist, aber nicht überall die Gleichheitszeichen bestehen, die Größe

$$(x_a + x_b + \cdots + x_l) - (x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\lambda) = (x_a - x_\alpha) + (x_b - x_\beta) + \cdots + (x_l - x_\lambda)$$

nicht Null sein kann; d. h. $x_a + x_b + \cdots + x_l$ kann nicht $x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\lambda$ gleich sein.

Nun bezeichnen wir mit $X'$ die Summe

$$\sum_{1}^{\nu} N_i e^{x_i}$$

und mit $X'', X''', \ldots, X^{(k)}$ die Summen, welche aus jener durch alle möglichen Permutationen der Zahlen $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ hervorgehen. Alsdann ist $k = \nu!$, und irgend eine Summe $X^{(s)}$ läßt sich schreiben

$$X^{(s)} = \sum_{1}^{\nu} N_i^{(s)} e^{x_i},$$

wo $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}, \ldots, N_\nu^{(s)}$ eine der $k$ Permutationen der $\nu$ Zahlen $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ bezeichnet.

Nun konstruieren wir das Produkt

$$P = X' \cdot X'' \cdots X^{(k)}.$$

Wenn wir beweisen, daß dieses Produkt von Null verschieden ist, so ist auch die Summe $X' = \sum_1^{\nu} {}^i N_i e^{x_i}$, die ein Faktor davon ist, von Null verschieden und damit der Satz A) bewiesen.

Wir können schreiben

$$P = \sum_1^{\nu} {}^a N_a' e^{x_a} \cdot \sum_1^{\nu} {}^b N_b'' e^{x_b} \cdots \sum_1^{\nu} {}^l N_l^{(k)} e^{x_l}$$

oder kürzer

(2) $$P = \sum_1^{\nu} {}^{a,\, b, \ldots l} N_a' N_b'' \cdots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \cdots + x_l}.$$

Unter allen Werten, die die Summe

$$x_a + x_b + \cdots + x_l$$

für alle möglichen Wertsysteme der Indices annehmen kann, mögen $n + 1$ voneinander verschieden sein, und diese wollen wir mit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ bezeichnen. Wir können dann einfacher schreiben

(3) $$P = \sum_0^{n} {}^{\mu} C_\mu e^{z_\mu},$$

wo für jeden Wert von $\mu$

(4) $$C_\mu = \sum {}^{a,\, b, \ldots l} N_a' N_b'' \cdots N_l^{(k)}$$

ist und die Summe sich über alle Wertsysteme von $a, b, \ldots, l$ erstreckt, für die $x_a + x_b + \cdots + x_l = z_\mu$ ist.

Nun kann man leicht sehen, daß von den $n + 1$ Größen $C_\mu$ wenigstens eine von Null verschieden ist. In der Tat, da in der Gruppe der $\nu$ Zahlen $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ wenigstens eine von Null verschieden ist, so gibt es in jeder der $k$ Permutationen

$$N_1',\ N_2',\ \ldots,\ N_\nu'$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$N_1^{(k)},\ N_2^{(k)},\ \ldots,\ N_\nu^{(k)}$$

dieser Gruppe eine erste von Null verschiedene Zahl; es sei dies $N_\alpha'$ in der ersten Permutation, $N_\beta''$ in der zweiten Permutation, $\ldots, N_\lambda^{(k)}$ in der $k^{\text{ten}}$ Permutation. Die von Null verschiedene Größe $N_\alpha' N_\beta'' \ldots N_\lambda^{(k)}$ ist aber nach Formel (2) ein Koeffizient von $P$ und steht in dem Gliede

$$N_\alpha' N_\beta'' \cdots N_\lambda^{(k)} e^{x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\lambda}.$$

Ist nun

$$N'_a N''_b \cdots N^{(k)}_l e^{x_a + x_b + \cdots + x_l}$$

irgend ein anderes Glied von $P$, dessen Koeffizient ebenfalls von Null verschieden ist, so muß

$$a \geqq \alpha, \; b \geqq \beta, \cdots l \geqq \lambda$$

sein (wo mindestens ein Ungleichheitszeichen gilt), und daher kann nach der im Anfang festgesetzten Ordnung der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ die Summe von $x_a + x_b + \cdots + x_l$ nicht gleich $x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\lambda$ sein. Mithin ist der Koeffizient $N'_\alpha N''_\beta \ldots N^{(k)}_\lambda$ selbst eine der Größen $C_u$, und es befindet sich also unter diesen wenigstens eine von Null verschiedene Größe.

Nun kann man eine ganze rationale Funktion $f(z)$ vom Grade $n + 1$ und mit ganzen Koeffizienten konstruieren, die die $n + 1$ Größen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ zu Wurzeln hat.

Man betrachte nämlich das Produkt aller Größen

$$z - (x_a + x_b + \cdots + x_l) \quad (a, b, \ldots, l = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Es ist eine ganze rationale Funktion von $z$, deren Koeffizienten ganze symmetrische Funktionen mit ganzen Koeffizienten der $\nu$ Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ der Gleichung (1) sind; daher sind diese Koeffizienten rational durch die Koeffizienten dieser Gleichung ausdrückbar und also rationale Zahlen. Das betrachtete Produkt ist also eine ganze Funktion von $z$ mit rationalen Koeffizienten; diese Funktion wird ferner nur Null für $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$; wenn man daher diese Funktion durch den größten Teiler dividiert, den sie mit ihrer ersten Ableitung gemeinsam hat, so wird der Quotient eine ganze Funktion von $z$ vom Grade $n + 1$, und multipliziert man diese mit einer geeigneten ganzen Zahl, so erhält man eine Funktion von $z$:

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_{n+1},$$

die rational und ganz und vom Grade $n + 1$ ist, ganze Koeffizienten hat und nur für $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$ Null wird.

Und nun ist der Moment gegeben, den im vorstehenden Paragraphen nachgewiesenen Hilfssatz anzuwenden. Wenn man nämlich von der Gleichung

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_{n+1} = 0$$

mit $n + 1$ ungleichen Wurzeln $z_0, z_1, \ldots, z_n$ ausgeht, so kann man ein System von $n + 1$ ganzen rationalen Funktionen von $z$ $g_0(z)$, $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ von nicht höherem Grade als $n$ und mit ganzen Koeffizienten konstruieren von der Beschaffenheit, daß die Determinante der Größen $g_i(z_u)$ von Null verschieden ist und jede der Differenzen

$$e^{z_\mu} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_\mu) \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

einen absoluten Betrag hat, der kleiner ist als eine beliebig klein gewählte Zahl $\sigma$, d. h. daß

$$(5) \qquad e^{z_\mu} \cdot g_i(z_0) - e^{z_0} \cdot g_i(z_\mu) = \varepsilon_{i\mu}\sigma \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ist, wo alle Größen $\varepsilon_{i\mu}$ einen absoluten Betrag kleiner als die Einheit haben.

Nun wollen wir beide Seiten der Formel (3) mit $e^{-z_0} \cdot g_i(z_0)$ multiplizieren. Wir erhalten dann die $n+1$ Gleichungen

$$e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = \sum_0^n {}^\mu C_\mu e^{z_\mu - z_0} \cdot g_i(z_0) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Aber aus den Relationen (5) folgt

$$e^{z_\mu - z_0} \cdot g_i(z_0) = g_i(z_\mu) + e^{-z_0} \cdot \varepsilon_{i\mu}\sigma \quad (i, \mu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Daher ergibt sich

$$(6) \quad e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = \sum_0^n {}^\mu C_\mu g_i(z_\mu) + e^{-z_0} \cdot \sigma \cdot \sum_0^n {}^\mu \varepsilon_{i\mu} C_\mu \quad (i = 0, 1, 2, \cdots n).$$

Nun wollen wir beweisen, daß die $n+1$ Summen

$$\sum_0^n {}^\mu C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

rationale Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist.

Dazu ist nur zu beweisen, daß die genannten Summen ganze symmetrische Funktionen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ der Gleichung (1) sind. Und in der Tat, wenn wir mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ unabhängige Veränderliche bezeichnen, so ist das Produkt

$$\sum_1^\nu {}^a N_a' e^{\xi_a} \cdot \sum_1^\nu {}^b N_b'' e^{\xi_b} \cdots \sum_1^\nu {}^l N_l^{(k)} e^{\xi_l}$$

und daher auch die Summe

$$\sum_1^\nu {}^{a, b, \ldots, l} N_a' N_b'' \cdots N_l^{(k)} e^{\xi_a + \xi_b + \cdots + \xi_l}$$

eine symmetrische Funktion von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$; dasselbe ist also auch mit der Summe

$$\sum_{1}^{\nu}{}^{a,\,b,\,\ldots,\,l}\, N_a{}' N_b{}'' \cdots N_l^{(k)} \quad (\xi_a + \xi_b + \cdots + \xi_l)^m$$

der Fall, wo $m$ irgend eine ganze Zahl ist. Setzt man dann $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2, \ldots, \xi_\nu = x_\nu$, so ergibt sich, daß alle Größen $\sum_0^n{}^\mu C_\mu z_\mu{}^m$ rationale Zahlen sind und daher sind auch die Ausdrücke

$$\sum_0^n{}^\mu C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

rationale Zahlen. Außerdem ist wenigstens eine von ihnen von Null verschieden. Denn in der Tat, wenn

$$\sum_0^n{}^\mu C_\mu g_i(z_\mu) = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

wäre, so müßte, da nicht alle $C_\mu$ Null sind, die Determinante der Größen $g_i(z_\mu)$ Null sein, was entsprechend der Konstruktion der Funktionen $g_i(z)$ nicht der Fall ist.

Endlich können wir alle rationalen Zahlen

$$\sum_0^n{}^\mu C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

mit einer geeigneten ganzen Zahl $M$ multiplizieren, so daß sie in $n + 1$ ganze Zahlen

$$Q_0,\ Q_1, \ldots, Q_n$$

übergehen, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist. Nach dem Hilfssatz des vorhergehenden Paragraphen können wir außerdem die Größe $\sigma$ so klein gewählt voraussetzen, daß jede der Größen

$$M \cdot e^{-z_0} \cdot \sigma \cdot \sum_0^n{}^\mu \varepsilon_{i\mu} C_\mu \qquad (i = 0,\ 1, \ldots, n)$$

einer Größe $\eta_i$ gleich wird, deren absoluter Betrag kleiner als die Einheit ist. Die Relationen (6) nehmen dann die Form an:

$$M \cdot e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P = Q_i + \eta_i \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n),$$

und da von den ganzen Zahlen $Q_i$ wenigstens eine von Null verschieden ist, während alle Größen $\eta_i$ einen absoluten Betrag kleiner als die Einheit haben, so ist wenigstens eine der Größen

$$M \cdot e^{-z_0} \cdot g_i(z_0) \cdot P \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden. Also ist das Produkt $P$ und daher auch die Summe $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$, die ein Faktor davon ist, von Null verschieden, und daher ist der Satz A) bewiesen.

Aus diesem Satze wollen wir nun andere allgemeinere ableiten, um schließlich zu dem Lindemannschen Satze zu gelangen.

B) Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ die $\nu$ voneinander verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu = 0$$

vom Grade $\nu$ mit rationalen Koeffizienten und $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ $\nu$ rationale Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so ist die Summe $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$ von Null verschieden.

In der Tat ist nur $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$ mit einer geeigneten ganzen Zahl zu multiplizieren, um auf die Voraussetzungen des Satzes A) zurückzukommen.

Setzt man in dem Satze B)

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1, \ldots, x_\nu = \nu - 1,$$

so folgt im besondern der Hermitesche Satz, nämlich:

Die Zahl $e$ kann nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$N_\nu e^{\nu-1} + N_{\nu-1} e^{\nu-2} + \cdots + N_1 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten sein.

Nun kommen wir zum Beweise des Satzes

C) Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ $\nu$ unabhängige algebraische Zahlen, d. h. nicht Wurzeln einer und derselben algebraischen Gleichung vom Grade $\nu$ mit rationalen Koeffizienten, und außerdem voneinander verschieden sind, und wenn $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ $\nu$ rationale Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so ist die Summe $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$ von Null verschieden.

In der Tat, wir können voraussetzen, daß $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ Wurzeln einer und derselben algebraischen Gleichung vom Grade $s > \nu$ mit rationalen Koeffizienten und ungleichen Wurzeln sind; diese

Gleichung wird außer den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ noch die anderen Wurzeln $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_s$ haben. Wenn dann $N_1, N_2, \ldots, N_\nu, N_{\nu+1}, \ldots, N_s$ $s$ rationale Zahlen sind von der Beschaffenheit, daß wenigstens eine der ersten $\nu$ Zahlen von Null verschieden ist, die anderen $N_{\nu+1}, N_{\nu+2}, \ldots, N_s$ aber Null sind, dann wissen wir, daß nach dem Satze B) die Summe $\sum_1^s N_i e^{x_i}$ von Null verschieden ist; aber da die letzten $s-\nu$ Glieder dieser Summe Null sind, so muß auch die Summe $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$ von Null verschieden sein, und damit ist der Satz C) bewiesen.

Und nun ist es leicht, den allgemeinen Lindemannschen Satz zu beweisen:

D) Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ irgendwelche $\nu$ voneinander verschiedene algebraische Zahlen und $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ algebraische Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so ist die Summe $\sum_1^\nu N_i e^{x_i}$ immer von Null verschieden.

In der Tat, es können $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ immer als Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $s \geq \nu$ mit rationalen Koeffizienten betrachtet werden. Es seien $N_1, N_2, \ldots, N_\nu, N_{\nu+1}, \ldots, N_s$ alle Wurzeln dieser Gleichung, und wir können voraussetzen, daß von ihnen nicht mehr als $\nu - 1$ gleich Null sind. Nun bilden wir alle Kombinationen der $s$ Elemente $N_1, N_2, \ldots, N_s$ zu $\nu$ Gliedern. Sie sind in der Zahl

$$k = s(s-1)(s-2)\cdots(s-\nu+1)$$

vorhanden und lassen sich in folgender Weise bezeichnen:

$$\begin{array}{l} N_1', \quad N_2', \quad \ldots, N_\nu', \\ N_1'', \quad N_2'', \quad \ldots, N_\nu'', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ N_1^{(k)}, \quad N_2^{(k)}, \quad \ldots, N_\nu^{(k)}. \end{array}$$

Nach der Voraussetzung gibt es in jeder dieser Kombinationen wenigstens eine von Null verschiedene Zahl.

Darauf bilden wir alle Summen

$$\sum_1^\nu N_i^{(\mu)} e^{x_i} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k);$$

eine davon ist die Summe

$$\sum_1^{\nu} {}^i N_i e^{x_i}$$

und wir wollen nun beweisen, daß sie nicht gleich Null sein kann.

Wir bilden das Produkt

$$P = \sum_1^{\nu} {}^a N_a' e^{x_a} \cdot \sum_1^{\nu} {}^b N_b'' e^{x_b} \cdots \sum_1^{\nu} {}^l N_l^{(k)} e^{x_l},$$

das sich kürzer schreiben läßt:

$$P = \sum_1^{\nu} {}^{a,\, b,\, \ldots,\, l} N_a' N_b'' \cdots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \cdots + x_l}.$$

Bezeichnen wir nun mit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ die verschiedenen Werte, die die Summe $x_a + x_b + \cdots + x_l$ für alle Wertsysteme, die man $a, b, \ldots, l$ beilegen kann, annimmt, so können wir schreiben

$$P = \sum_0^{n} {}^\mu C_\mu e^{z_\mu},$$

wenn

$$C_\mu = \sum{}'^{\,a,\, b,\, \ldots,\, l} N_a' N_b'' \cdots N_l^{(k)}$$

gesetzt ist, wo die Summe sich über alle diejenigen Wertsysteme von $a, b, \ldots, l$ erstrecken soll, für die $x_a + x_b + \cdots + x_l = z_\mu$ ist.

Die Größen $C_\mu$ sind offenbar ganze symmetrische Funktionen in den Größen $N_1, N_2, \ldots, N_s$ mit ganzen Koeffizienten und daher sämtlich rationale Zahlen. Ferner ist wenigstens eine der $C_\mu$ von Null verschieden, was man leicht beweist, wenn man wie in dem Beweise des Satzes A) verfährt.

Wenn nun $z_0, z_1, \ldots, z_n$ voneinander verschiedene algebraische Zahlen und $C_0, C_1, \ldots, C_n$ rationale Zahlen sind, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so kann nach dem Satze C) die Summe $\sum_0^{n} {}^\mu C_\mu e^{z_\mu}$ nicht Null sein. Also kann auch nicht $P$ und daher auch nicht die Summe $\sum_1^{\nu} {}^i N_i e^{x_i}$, die ein Faktor davon ist, Null sein. Und damit ist der allgemeine Lindemannsche Satz bewiesen.

## § 6. Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$. Unmöglichkeit, mit dem Lineal und dem Zirkel eine Kreislinie von ge-

**gebenem Radius oder einen Kreisbogen von gegebener Sehne zu rektifizieren.** Aus dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satze D) lassen sich viele wichtige Sätze herleiten, von denen wir jetzt die bemerkenswertesten und im besondern die Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$ hervorheben wollen.

1. Man setze in dem Ausdrucke $\sum_1^\nu N_s e^{x_s}$

$$\nu = 2;\ N_1 = 1,\ N_2 = -X;\ x_1 = x,\ x_2 = 0;$$

er wird dann $e^x - X$ und kann niemals Null sein, wenn $x$ eine von Null verschiedene algebraische Zahl und $X$ irgend eine algebraische Zahl ist. Also:

Die exponentielle Größe $e^x$ ist allemal eine transzendente Zahl, wenn $x$ eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist.

Als besonderer Fall ergibt sich für $x = 1$: Die Zahl $e$ ist eine transzendente Zahl.

Der natürliche Logarithmus einer von 1 verschiedenen algebraischen Zahl $X$ ist immer eine transzendente Zahl.

Im besonderen ergibt sich, da $e^{\pi i} = -1$ ist: Die Zahl $\pi i$ und daher auch $\pi$ selbst ist eine transzendente Zahl.

Es folgt daraus (vgl. § 1), daß, wenn man von einer als Maßeinheit genommenen Strecke ausgeht, man nicht durch eine Konstruktion, in der nur algebraische Kurven auftreten, eine Strecke von dem Maße $\pi$ herstellen kann. Und da die Rektifikation und die Quadratur eines Kreises, wenn man von dem Durchmesser als Einheitsstrecke ausgeht, darauf zurückkommen, eine Strecke von der Länge $\pi$ zu konstruieren (vgl. § 1), so folgt:

Es lassen sich die Rektifikation und die Quadratur eines Kreises, dessen Durchmesser gegeben ist, durch geometrische Konstruktionen, in denen nur algebraische Kurven auftreten, nicht ausführen.

Und daraus folgt umsomehr:

Es lassen sich die Rektifikation und die Quadratur eines Kreises, dessen Durchmesser gegeben ist, durch geometrische Konstruktionen, in denen nur das Lineal und der Zirkel angewandt werden, nicht ausführen.

2. Man setze in dem Ausdrucke $\sum_1^\nu N_s e^{x_s}$

$$\nu = 3;\ N_1 = \frac{1}{i},\ N_2 = -\frac{1}{i},\ N_3 = -X;$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{ix}{2},\ x_3 = 0.$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck

$$\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{i} - X = 2\sin\frac{x}{2} - X$$

nicht Null sein kann, solange sowohl $x$ wie $X$ von Null verschiedene algebraische Zahlen sind. Aber wenn wir zur Maßeinheit den Radius des Kreises wählen, so stellt $2\sin\frac{x}{2}$ die zu dem Bogen von der Länge $x$ gehörige Sehne dar. Also:

Ein Kreisbogen, dessen Sehne, wenn der Radius des Kreises zur Maßeinheit genommen wird, eine algebraische Zahl zum Maße hat, wird durch eine transzendente Zahl ausgedrückt, und dasselbe ist mit dem zu dem genannten Bogen gehörigen Kreissektor der Fall.

Aus diesem Satze können wir schließen (vgl. § 1):

Wenn die Sehne eines Kreisbogens, dessen Radius zur Einheit genommen wird, durch eine algebraische Zahl ausgedrückt wird, so kann man durch geometrische Konstruktionen, in denen nur algebraische Kurven auftreten, weder den Bogen rektifizieren, noch den dazu gehörigen Sektor quadrieren.

Und daraus folgt umsomehr (vgl. § 1):

Man kann durch Konstruktionen, bei denen nur das Lineal und der Zirkel gebraucht werden, einen Kreisbogen nicht rektifizieren und den dazu gehörigen Sektor nicht quadrieren, wenn die zu dem Bogen gehörige Sehne mit Hilfe von rationalen Operationen und Quadratwurzeln durch den Radius ausgedrückt und daher selbst elementar konstruierbar ist.

3. Umgekehrt ist für jeden Kreisbogen, der zu dem Radius in einem algebraisch ausdrückbaren Verhältnisse $x$ steht, $x = 0$ ausgenommen, $X = \sin x$ eine transzendente Zahl.

Dies folgt aus dem Lindemannschen Satze auf Grund der Relation

$$2iX = e^{ix} - e^{-ix}.$$

Dasselbe kann man von allen trigonometrischen Größen cos $x$, tg $x$, usw. sagen.

**§ 7. Graphische Lösung der Aufgaben der Rektifikation und Quadratur des Kreises mit Hilfe des Integraphen.** Die Frage, um deren Lösung die Mathematiker sich so lange Zeit bemüht haben, ob man nämlich einen Kreis von gegebenem Radius nur durch Konstruktionen von Geraden und Kreisen, d. h. nur mit Hilfe des Lineals und des Zirkels rektifizieren oder quadrieren kann, ist also durch die Ergebnisse des vorigen Paragraphen negativ entschieden worden, und zwar in einem viel weiteren Sinne als sie gestellt war.

Bei der Unmöglichkeit, den Kreis nur mit Hilfe von Geraden und Kreisen zu rektifizieren, kann man versuchen, zu dieser Rektifikation mit Hilfe von Kurven von höherer Art zu gelangen, genau wie man zur Lösung der Aufgaben der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels, da hierzu Gerade und Kreise ebenfalls nicht genügten, zu Kegelschnitten und höheren algebraischen Kurven seine Zuflucht nahm.

Zur Konstruktion von $\pi$ z. B. würde, wenn man von der zur Maßeinheit gewählten Strecke ausgeht, nur nötig sein, daß man eine Kurve ziehen kann, die, auf ein bestimmtes System von rechtwinkligen cartesischen Koordinaten bezogen, einen Punkt hätte, von dem eine Koordinate mit Hilfe von rationalen Operationen und Quadratwurzeln durch $\pi$ ausdrückbar ist, während die andere elementar konstruierbar ist, d. h. als ein Ausdruck sich darstellt, der nur rationale Zahlen und quadratische Irrationalitäten enthält (vgl. § 1).

Da nun die Zahl $\pi$ selbst transzendent ist, so würde die erste Koordinate dieses Punktes auch transzendent sein, und daraus folgt, daß eine Kurve von dieser Eigenschaft nur eine transzendente Kurve sein kann.

Eine Kurve, die zu diesem Zwecke benutzt werden könnte, ist die Linie

$$y = \arcsin x,$$

und in der Tat würden uns die Schnittpunkte dieser Kurve mit der $y$-Achse in ihren Ordinaten $\pi$ und alle seine Vielfachen liefern. Die Beispiele von transzendenten Kurven, die, einmal in einem kontinuierlichen Zuge beschrieben, die graphische Lösung der Aufgabe der Rektifikation des Kreises liefern würden, ließen sich vermehren.

Wir wollen nun zeigen, wie einige von ihnen sich mit Hilfe der sogenannten Integraphen wirklich in einem kontinuierlichen Zuge beschreiben lassen.

Bezeichnet man als Differentialkurve irgend eine Kurve

$$y = f(x),$$

so nennt man Integralkurve die Kurve, deren Gleichung

$$Y = F(x)$$

ist, wo

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Ist also die Differentialkurve gegeben, so ist die Integralkurve bis auf eine Parallelverschiebung zur $y$-Achse definiert. So ist z B. die Arcussinuslinie

$$y = \arcsin x$$

die Integralkurve der Kurve

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

die algebraisch von der vierten Ordnung ist. Geht man andererseits von dem Kreise vom Radius 1, dessen Mittelpunkt sich im Anfangspunkte der Koordinaten befindet,

$$x^2 + y^2 = 1$$

als Differentialkurve aus, so ist die Integralkurve

$$y = \int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2},$$

und die Ordinaten der Schnittpunkte dieser Kurve mit der $y$-Achse werden uns also $\pi$ und seine Vielfachen geben.

Ein Instrument, mit dem man in einem kontinuierlichen Zuge die Integralkurve beschreiben kann, sobald die Differentialkurve gezeichnet ist, wird also zur graphischen Konstruktion von $\pi$ benutzt werden können.

Ein solches Instrument, Integraph genannt, ist vor mehreren Jahren von dem Russen Abdank-Abakanowicz wirklich erfunden und später von Coradi in Zürich vervollkommnet worden. Wir wollen hier kurz das Prinzip andeuten, auf dem es beruht, und die wesentlichen Teile, aus denen der Apparat besteht, beschreiben; für eine genauere Beschreibung des Apparates und seiner verschiedenen Anwendungen sei auf das Werk des Erfinders selbst verwiesen, das von E. Bitterli unter dem Titel: Die Integraphen, Leipzig 1889, ins Deutsche übersetzt worden ist.

Wir denken die beiden rechtwinkligen Achsen $Ox$, $Oy$ und die Differentialkurve $C$ von der Gleichung

$$y = f(x)$$

gezeichnet.

Betrachten wir irgend einen Punkt $P$ von den Koordinaten $x$, $y$ der Kurve $C$, so wollen wir das Dreieck zeichnen, das zu Eckpunkten hat: den Punkt $P$, den Fußpunkt $Q$ der zu $P$ gehörigen Ordinate und den Punkt $S$ der Achse $Ox$, der von $Q$ um ein Stück gleich der Maßeinheit entfernt ist. Die Tangente des Winkels $\varphi$, den die Hypotenuse des Dreiecks mit der Abszissenachse bildet, ist dann gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PQ}{QS} = y.$$

Andererseits ist die Gleichung der Integralkurve $J$

$$Y = \int f(x)\, dx.$$

Bezeichnen wir mit $P'$ den Punkt dieser Kurve, der dem Punkte $P$ der Differentialkurve entspricht (d. h. dieselbe Abszisse hat), so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die in dem Punkte $P'$ an die Integralkurve gezogene Tangente mit der Abszissenachse bildet, gegeben durch

$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y.$$

Daraus folgt, daß für jeden Punkt der Differentialkurve die Hypotenuse des betrachteten Dreiecks der Tangente der gesuchten Integralkurve in dem entsprechenden Punkte parallel ist.

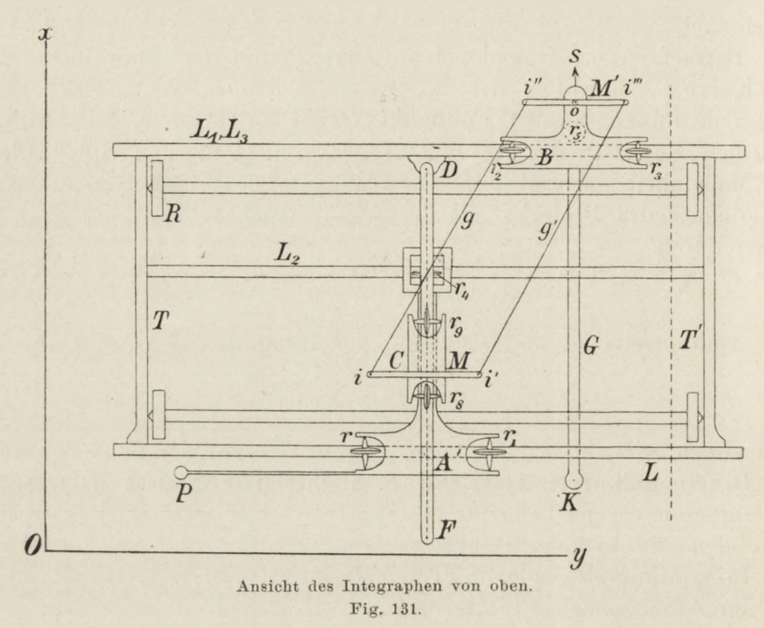
Fig. 130.

Und diese Bemerkung hat Abdank-Abakanowicz auf die Konstruktion des Integraphen geführt, den wir jetzt beschreiben wollen, indem wir die von Coradi angebrachten Verbesserungen berücksichtigen.

In den beiden Figuren 131 und 132 ist der Apparat in einer oberen Ansicht und einem vertikalen Schnitt schematisch dargestellt.

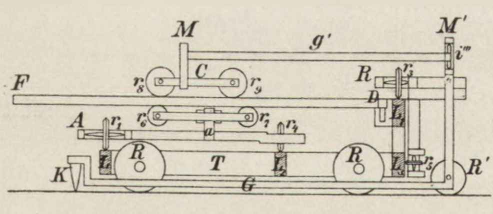
Drei horizontale und zueinander parallele Schienen $L$, $L_1$, $L_2$ sind durch zwei Querstangen $T$ und $T'$ so miteinander verbunden,

daß sie einen festen rechteckigen Rahmen bilden; dieser ruht auf vier Rädern $R$ und kann dadurch auf dem Zeichenblatte eine Bewegung parallel zur Abszissenachse erhalten. Die Schienen $L$ und $L_1$ sind




Ansicht des Integraphen von oben.
Fig. 131.

auf ihrer oberen Seite mit einer Rinne versehen, und zwar können in der Rinne von $L$ die beiden Räder $r$ und $r_1$ des Wagens $A$ laufen und in der Rinne von $L_1$ die beiden Räder $r_2$ und $r_3$ des Wagens $B$.




Vertikaler Schnitt durch den Integraphen.
Fig. 132.

Der Wagen $A$ wird durch das Rad $r_4$, das sich in einer Rinne von $L_2$ bewegen kann, in seiner horizontalen Lage erhalten und der Wagen $B$ durch das Rad $r_5$, das sich in einer Rinne einer (in der Fig. 131 nicht sichtbaren) Schiene $L_3$, die parallel zu $L_1$ und unter dieser Schiene angebracht ist, bewegen kann. An dem Wagen $A$ ist eine (in der Fig. 131 nicht sichtbare) vertikale Achse $a$ angebracht, um die sich ein Wagen mit zwei Rädern $r_6$ und $r_7$ drehen kann. Diese beiden Räder $r_6$ und $r_7$ können sich in einer Rinne bewegen, die

sich auf der unteren Seite des horizontalen Armes $F$ befindet, der sich um eine in dem Punkte $D$ angebrachte vertikale Achse drehen kann.

Nun denke man sich auf dem Zeichenblatte zwei zueinander rechtwinklige Achsen, $Ox$ normal und $Oy$ parallel zu der Schiene $L_1$ gezogen, dann wird einem mit dem Wagen $A$ fest verbundenen Punkte $P$ eine Bewegung in der Richtung $Ox$ und eine Bewegung in der Richtung $Oy$ erteilt werden können, und dieser Punkt wird daher irgend eine Linie $y = f(x)$ beschreiben können. Dann wird der Punkt, in dem die Achse $a$ die $xy$-Ebene treffen würde, da er mit dem Punkte $P$ fest verbunden ist, dieselbe Kurve wie $P$ beschreiben, und die Strecke, die ihn mit der Projektion des Punktes $D$ auf die $xy$-Ebene verbindet, wird während der Bewegung immer dieselbe Strecke zur Projektion auf die Abszissenachse haben; diese Projektion, die in dem Instrumente, das wir hier beschreiben, zwischen 10 und 20 cm genommen werden kann, stellt die lineare Einheit des Apparates dar und ist die Basis des rechtwinkligen Dreiecks, von dem wir oben gesprochen haben. Daher wird die variable Richtung der Hypotenuse des genannten Dreiecks in jedem Augenblicke durch den um $D$ drehbaren Arm $F$ dargestellt.

Nun kommen wir zur Beschreibung derjenigen Teile des Apparates, die dazu dienen, einen Zeichenstift $K$ so zu führen, daß seine Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke der variablen Richtung des Armes $F$ parallel ist, so daß $K$ die Integralkurve der Kurve $y = f(x)$ beschreibt.

Der Arm $F$ hat auch auf seiner oberen Seite eine Rinne, und in dieser können die Räder $r_8$ und $r_9$ eines horizontalen Wagens $C$ laufen, an dem eine horizontale Querstange $M$ normal zur Ebene der beiden Räder d. h. normal zum Arme $F$ angebracht ist. An den (zu der Rinne symmetrisch liegenden) Enden dieser Querstange $M$ befinden sich die vertikalen Achsen $i$ und $i'$. Andererseits ist an dem Wagen $B$ eine vertikale Achse $o$ angebracht, um die sich eine Stange $M'$ drehen kann, und mit dieser Stange sind (in gleicher Entfernung von der Achse $o$) zwei Achsen $i''$ und $i'''$ verbunden, deren Entfernung ebenso groß ist wie die Entfernung der Achsen $i$ und $i'$. Die Achsen $i$ und $i''$, $i'$ und $i'''$ sind durch gleich lange Stangen miteinander verbunden, so daß ein Gelenkparallelogramm entsteht. Mit der Stange $M'$ endlich ist ein scharfrandiges Rad $R'$ in der Weise verbunden, daß seine Achse parallel zu $M'$ ist und sein Mittelpunkt in der Verlängerung der Achse $o$ liegt. Dieses Rad $R'$ wird durch das Gewicht der Stange $M'$ an das Zeichenblatt angedrückt, so

daß es sich nur in seiner eigenen Ebene, d. h. in der zu der Stange $M'$ normalen Richtung $s$ und also parallel zu dem Arme $F$ bewegen kann.

Bewegt sich nun der Wagen $A$ auf der Schiene $L$, so dreht sich der Arm $F$ um den Punkt $D$ und der Wagen $C$ rollt auf diesem Arme, und da die Stange $M$ immer senkrecht zum Arme $F$ bleibt, so tut dies wegen des Gelenkparallelogramms auch die Stange $M'$ und also auch die Achse von $R'$. Nun ist mit $M'$ noch ein Arm $G$ unten am Apparate verbunden, der mit einem Schreibstift oder einer Reißfeder $K$ endigt. Wenn dann der Punkt $P$ die Differentialkurve beschreibt, so beschreibt der Punkt $K$ die Integralkurve, und die einander entsprechenden Punkte der beiden Kurven liegen auf derselben Ordinate.

Zur Bestimmung von $\pi$ kann man auch die Planimeter benutzen, d. h. die Instrumente, die zur Bestimmung des Flächeninhalts von krummlinig begrenzten ebenen Figuren dienen, also den Wert des bestimmten Integrals einer graphisch dargestellten Funktion liefern. Mit einem solchen Instrumente kann man in der Tat den Flächeninhalt eines Kreises von gegebenem Radius bestimmen, woraus sich dann $\pi$ ergibt. Unter den Planimetern sei als das beste das sogenannte Polarplanimeter von Amsler erwähnt.

**§ 8. Geometrische Konstruktionen zur annähernden Rektifikation und Quadratur des Kreises.** Wenn man nur das Lineal und den Zirkel benutzen und keine transzendenten Instrumente, wie z. B. die Integraphen, zu Hilfe nehmen will, so kann man eine genaue Lösung der Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen, nicht erhalten; es sind jedoch Konstruktionen vorgeschlagen worden und in der Praxis auch im Gebrauch, mit deren Hilfe man allein mit Geraden und Kreisen die Rektifikation und Quadratur des Kreises in annähernder Weise ausführen kann, d. h. indem man einen Fehler begeht, der für gewöhnliche Zwecke vernachlässigt werden darf.

Eine solche Konstruktion ist z. B. die von Specht[1]), die mit großer Annäherung die Rektifikation des Kreises ergibt.

Auf einer an den Kreis vom Radius $r$ gezogenen Tangente (Fig. 133) schneide man vom Berührungspunkte $A$ aus die Strecke $AB$ gleich dem Durchmesser, vermehrt um ein Fünftel des Radius, ab und mache dann $BC$ gleich zwei Fünfteln des Radius; darauf verbinde man $O$ mit $B$ und mit $C$, trage auf dem durch $A$ gehenden

1) J. f. Math. 3, pg. 83.

Durchmesser eine Strecke $AD$ gleich $OB$ ab und ziehe durch $D$ die Parallele zu $OC$. Bezeichnet man dann den Punkt, in dem diese Parallele die Tangente schneidet, mit $E$, so stellt $AE$ mit großer Annäherung die Länge des Kreisumfanges dar.

In der Tat ist

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AO} = \frac{13}{5},$$

also

$$AE = \frac{13}{5} \cdot OB = r \cdot \frac{13}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = r \cdot \frac{13}{25} \sqrt{146}.$$

Dies ergibt

$$AE = r \cdot 6{,}2831839\ldots$$

und da

$$2\pi = 6{,}2831853\ldots$$

ist, so folgt, daß $AE$ um weniger als zwei Millionstel des Radius kleiner ist als der Kreisumfang.

Das Rechteck, das $AE$ und die Hälfte des Radius $r$ zu Seiten hat, oder das gleich große Quadrat ergibt entsprechend mit großer Annäherung die Quadratur des Kreises.

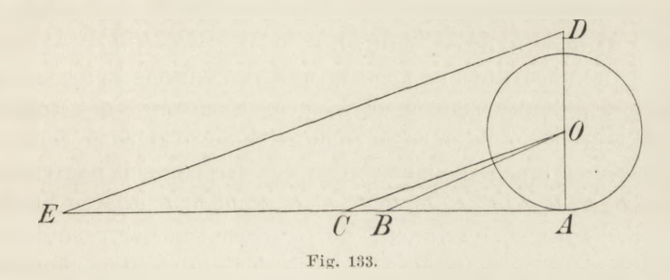


Fig. 133.

Wenn es sich nur um die Quadratur des Kreises handelt, so kann man folgende Konstruktion benutzen.[1])

Auf dem Durchmesser $AB$ des gegebenen Kreises (Fig. 134) trage man die Strecke $OD$ gleich drei Fünfteln des Radius und nach der anderen Seite die Strecke $OF$ gleich drei Hälften des Radius ab; dann halbiere man den Radius $OB$ in dem Punkte $E$ und schlage über $DE$ und $AF$ als Durchmesser Halbkreise auf entgegengesetzten Seiten von $AB$. Errichtet man nun in $O$ auf $AB$ die Normale, die die beiden Halbkreise in $G$ und $H$ schneiden mag, so stellt das

1) Vgl. die Geometria elementare von Sannia und d'Ovidio, wo noch andere Konstruktionen für die annähernde Rektifikation und Quadratur des Kreises angegeben sind.

Quadrat, das $GH$ zur Seite hat, mit großer Annäherung den Flächeninhalt des gegebenen Kreises dar.

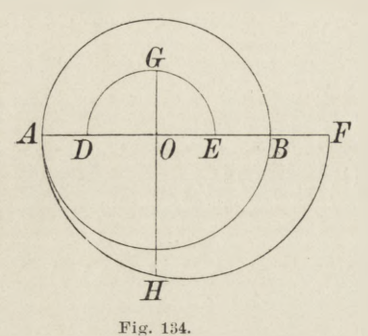



Fig. 134.

Denn infolge der Konstruktion ist

$$OD = r \cdot \tfrac{3}{5}, \quad OE = r \cdot \tfrac{1}{2},$$

$$OA = r, \quad OF = r \cdot \tfrac{3}{2}.$$

Aber $OG$ ist mittlere Proportionale zu $OD$ und $OE$ und $OH$ mittlere Proportionale zu $OA$ und $OF$, also ist

$$OG = r \cdot \sqrt{\tfrac{3}{10}}, \quad OH = r \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

und daher

$$GH = r \cdot \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} = r \cdot 1{,}77246\ldots,$$

und da

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ldots$$

ist, so ist $GH$ um weniger als zwei Hunderttausendstel des Radius größer als die Seite des Quadrates, das dem gegebenen Kreise gleich ist.

**§ 9. Quadrierbare Lunulae.** Der Mißerfolg bei den Versuchen, allein mit Hilfe des Lineals und des Zirkels den ganzen Kreis zu quadrieren, mußte, bevor er in dem Nachweise des transzendenten Charakters der Zahl $\pi$ seine natürliche Aufklärung fand, um so bemerkenswerter erscheinen, als viele von Kreisbogen begrenzte ebene Flächen seit dem Altertume der Gegenstand fruchtbarer Studien gewesen sind. Einige von ihnen, die „Schustermesser", sind reich an merkwürdigen und eleganten, mit Hilfe der einfachsten geometrischen Theorien nachweisbaren Eigenschaften[1]), andere, die Lunulae des Hippokrates, lassen sich auf einfachste Weise mit Hilfe des Lineals und des Zirkels quadrieren.

Bekannt ist der Satz, daß die Summe der beiden Menisken (oder Lunulae), die von den drei Halbkreisen, die zu Durchmessern die

1) Viele dieser Eigenschaften, von denen wir die Reihen von Kreisen hervorheben wollen, die sich in ein Schustermesser in der Weise einbeschreiben lassen, daß jeder Kreis den folgenden berührt, sind in den Pappi Alexandrini Collectiones (ed. Fr. Hultsch, 1, pg. 219 ff., prop. 15—18) dargelegt und bewiesen J. Steiner hat von diesen Sätzen neue sehr einfache und elegante Beweise gegeben und einige von ihnen auch beträchtlich erweitert. Vgl. auch J. S. Mackay, The shoemaker's knife (Edinburg M. Soc. Proc. 3 (1885), pg. 2—11), wo die bemerkenswertesten und einfachsten Eigenschaften der Schustermesser zusammengestellt und bewiesen sind.

Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks haben, begrenzt sind und auf derselben Seite der Hypotenuse liegen, gleich dem Dreiecke ist. Wenn im besondern das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist, so ist jeder der beiden Menisken gleich dem gleichschenkligen Dreiecke, das die Hälfte des ersten ist, und also elementar quadrierbar, wenn seine Sehne bekannt ist.

Diese von Hippokrates betrachtete mondförmige Fläche stellt eine erste Lösung der Frage dar, ob man mit dem Lineal und dem Zirkel elementar quadrierbare mondförmige Flächen konstruieren kann. Vier andere, als ganz neu betrachtete Lösungen wurden im Jahre 1840 von Th. Clausen[1]) angegeben, der gleichzeitig die Meinung aussprach, daß außer diesen fünf Fällen andere quadrierbare mondförmige Flächen wohl nicht existieren

Jüngst ist E. Landau[2]) auf diese Frage zurückgekommen. Er hat in allgemeinster Weise die Gleichungen und die arithmetischen Bedingungen der Aufgabe aufgestellt und bewiesen, daß diese in einer gewissen unendlichen Reihe von Fällen nicht miteinander verträglich sind, aber diese Reihe umfaßt keineswegs alle möglichen Fälle, so daß nichts uns zu der Meinung berechtigt, daß die einzigen Lösungen der Aufgabe in den fünf oben angegebenen bestehen.

Betrachten wir kurz den Landauschen Gedankengang.

Es seien $AEB$ und $AE'B$ (Fig. 135) zwei Kreisbogen über derselben Sehne $AB$ und auf derselben Seite dieser Sehne; $C$ und $C'$ seien die Mittelpunkte und $r$ und $r'$ die Radien der beiden Kreise, und $2\varphi$ und $2\varphi'$ die zu den Bogen gehörigen Zentriwinkel. Nimmt man die Sehne $AB$ zur Einheit, so erhält man zunächst

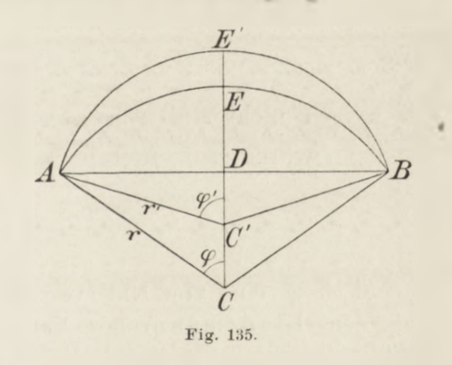


Fig. 135.

$$r \sin \varphi = r' \sin \varphi' = \tfrac{1}{2}, \quad (1)$$

und man kann daher, wenn die Sehne $AB$ bekannt ist, den Meniskus $AEBE'$ mit Lineal und Zirkel konstruieren, wenn die trigonome-

1) Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist. J. f. Math. 21 (1840), pg. 375.

2) Sitzungsberichte der Berl. Math. Ges., 10. Sitz. am 29. Okt. 1902 (Archiv Math. Phys. (3) 4 (1903)).

trischen Linien der Winkel $\varphi$ und $\varphi'$ (und daher wegen (1) auch $r$ und $r'$) allein durch Quadratausdrücke ausdrückbar sind.

Andererseits ist der Meniskus $AEBE'$ auf elementare Weise quadrierbar, wenn die Differenz der beiden Sektoren $ACBE$ und $AC'BE'$ durch eine algebraische Zahl, die nur quadratische Irrationalitäten enthält, ausdrückbar ist. Wenn man daher mit $a$, $b$, $c$ Zahlen bezeichnet, die nur quadratische Irrationalitäten enthalten, und wenn $a$ und $b$ gleich oder kleiner als 1 sind, so sind die Gleichungen der Aufgabe

$$\sin\varphi = a,\ \sin\varphi' = b$$

$$r^2\varphi - r'^2\varphi' = \frac{c}{4}$$

oder wegen (1)

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = a,\ \sin\varphi' = b \\ \dfrac{\varphi}{\sin^2\varphi} - \dfrac{\varphi'}{\sin^2\varphi'} = c. \end{array}\right| \tag{2}$$

Setzt man nun $\frac{\varphi'}{\varphi} = p$, so bemerkt Landau, daß, wenn $p$ eine algebraische Zahl bezeichnet, $c = 0$ sein muß. In der Tat folgt aus (2)

$$\frac{\varphi}{a^2} - \frac{p\varphi}{b^2} = c$$

oder

$$\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} = \frac{c}{\varphi}, \tag{3}$$

und wenn $c$ nicht Null wäre, so könnte auch $\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}$ nicht Null sein, und dann würde sich ergeben

$$\varphi = \frac{c}{\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}};$$

also würde $\varphi$ eine von Null verschiedene algebraische Zahl sein, und nach dem Lindemannschen Satze würde dann $\sin\varphi$ transzendent sein[1]) entgegen der ersten Gleichung von (2).

Beschränkt man die Allgemeinheit der Aufgabe und setzt $p$ als algebraisch und daher $c$ als Null voraus, so gibt die Gleichung (3): $p = \frac{b^2}{a^2}$. Daher kann auch $p$ (ebenso wie $a$ und $b$) nur quadratische Irrationalitäten enthalten, und wir haben $\sqrt{p}\cdot a = b$, oder nach den Gleichungen (2):

1) Vgl. § 6, 3.

$$\sqrt{p} \cdot \sin\varphi = \sin p\varphi.$$

Somit kommt die Frage auf die Untersuchung zurück, für welche nur quadratische Irrationalitäten enthaltende Werte von $p$ die Gleichung

$$\sqrt{p} \cdot \sin\varphi = \sin p\varphi \tag{4}$$

durch Werte von $\sin\varphi$ und $\sin p\varphi$ erfüllt ist, die allein durch quadratische Irrationalitäten sich ausdrücken.

Die von Clausen angegebenen Fälle, in denen das wirklich stattfindet, sind die folgenden:

1) $p = 2$. Die Gleichung (4) wird

$$\sqrt{2} \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi,$$

woraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^0.$$

2) $p = 3$. Die Gleichung (4) wird

$$\sqrt{3} \cdot \sin\varphi = \sin 3\varphi,$$

woraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}.$$

3) $p = \frac{3}{2}$. Die Gleichung (4) wird

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \sin\varphi = \sin\tfrac{3}{2}\varphi,$$

woraus folgt

$$4\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2 = 0,$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}-1}{8}.$$

4) $p = 5$. Die Gleichung (4) wird

$$\sqrt{5} \cdot \sin\varphi = \sin 5\varphi,$$

woraus folgt

$$16\sin^4\varphi - 20\sin^2\varphi + 5 - \sqrt{5} = 0.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{5 - \sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8},$$

$$\text{os}\, 2\varphi = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1}{4} \quad \left(2\varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

5) $p = \frac{5}{3}$. Die Gleichung (4) wird

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}} \cdot \sin\varphi = \sin\tfrac{5}{3}\varphi,$$

woraus folgt

$$16\cos\frac{4\varphi}{3} - \left(12 + 4\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)\cos\frac{2\varphi}{3} + 1 + \sqrt{\tfrac{5}{3}} = 0,$$

$$\cos\frac{2\varphi}{3} = \frac{3 + \sqrt{\tfrac{5}{3}} + \sqrt{\tfrac{20}{3} + \sqrt{\tfrac{20}{3}}}}{8},$$

$$\cos\frac{2\varphi}{3} = \frac{\sqrt{\tfrac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\tfrac{20}{3} + \sqrt{\tfrac{20}{3}}}}{4} \quad \left(\frac{2\varphi}{3} < \frac{\pi}{2}\right).$$

Von diesen fünf Fällen entspricht der erste den oben betrachteten Lunulae des Hippokrates; die vier anderen wurden von Clausen für neu gehalten, während Landau bemerkt, daß die Fälle, die den Werten $p = 3$ und $p = \frac{3}{2}$ entsprechen, schon dem Hippokrates bekannt waren.

Hinsichtlich anderer Lösungen der Aufgabe beweist Landau, indem er sich auf einen Satz von Eisenstein über die Irreduzibilität gewisser algebraischen Gleichungen stützt, den folgenden Satz, den wir nur anführen:

Wenn das Verhältnis der beiden Zentriwinkel $2\varphi$, $2\varphi'$ eine Primzahl ist, die nicht zu den Gaußschen Primzahlen $2^m + 1 = 2^{2^k} + 1$ gehört, so ist der Meniskus nicht quadrierbar.

**§ 10. Historische Skizze der Untersuchungen über die Quadratur des Kreises.** In den Untersuchungen über die Quadratur des Kreises lassen sich drei Perioden unterscheiden[1]:

Die erste erstreckt sich von den ersten Anfängen mathematischen Denkens bis zur Entdeckung der Differential- und Integralrechnung, d. h. bis zur Mitte des siebzehnten Jahrhunderts; das Ziel der Arbeiten dieser Periode besteht in der annähernden numerischen Bestimmung des Verhältnisses von Umfang zu Radius mit Hilfe von geometrischen Konstruktionen.

In der zweiten Periode, von der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung bis zur Mitte des achtzehnten Jahrhunderts, treten an Stelle der geometrischen Methoden der Alten die neuen analytischen Methoden; die Untersuchungen dieser Periode zeigen einen wesentlich theoretischen Charakter, indem das Augenmerk darauf

1) Wir folgen hier dem sehr genauen Werke von Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre; Leipzig 1892.

gerichtet wird, die Zahl $\pi$ durch analytische Ausdrücke, die eine unendliche Zahl von Operationen enthalten, darzustellen, nämlich durch Entwicklungen in Reihen, in unendliche Produkte, in Kettenbrüche.

Die dritte Periode, von der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts bis auf unsere Tage, enthält Untersuchungen kritischer Art, in denen es sich nicht mehr darum handelt, die Größe oder den analytischen Ausdruck der Zahl $\pi$ zu bestimmen, sondern die Natur dieser Zahl zu ergründen, ob sie rational oder irrational, algebraisch oder transzendent ist.

Erste Periode. Die Aufgabe, ein Quadrat zu konstruieren, das einer gegebenen Kreisfläche gleich ist, wird das erste Mal in dem ältesten mathematischen Dokumente, das man kennt, ausgesprochen, nämlich in dem Papyrus Rhind, der etwa 2000 Jahre v. Chr. von dem ägyptischen Schreiber Ahmes verfaßt worden ist und im britischen Museum aufbewahrt wird. Dort wird ohne Beweis die folgende Regel zur Lösung der Aufgabe angegeben: Die Fläche des Kreises ist gleich der eines Quadrates, dessen Seite der um $\frac{1}{9}$ verringerte Durchmesser $d$ des Kreises ist. Nach dieser Regel beträgt die Kreisfläche

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2,$$

woraus sich auf Grund der Formel $\frac{1}{4}\pi d^2$ für $\pi$ der Wert

$$\frac{256}{81} = 3{,}1604\ldots,$$

also ein Wert ergibt, der dem wahren Werte von $\pi$ ziemlich nahe liegt.

Der erste Hinweis auf das Problem der Rektifikation des Kreises findet sich in der Bibel, wo der Kreisperipherie die dreifache Länge des Durchmessers beigelegt wird; hieraus ergibt sich für $\pi$ der Wert 3, also ein viel ungenauerer Wert als der von den Ägyptern angegebene.

Erst bei den Griechen beginnen wissenschaftliche Untersuchungen über diesen Gegenstand und diese erreichen eine bedeutende Höhe in dem Werke von Archimedes von Syrakus (287—212 v. Chr.). Von den griechischen Mathematikern, die vor Archimedes sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigten, verdienen Hippokrates von Chios (ungefähr 450 v. Chr.) und Dinostratos (ungefähr 350 v. Chr.) besondere Erwähnung. Man verdankt dem Hippokrates den ersten Beweis des Satzes, daß die Kreisflächen den Quadraten der Durchmesser proportional sind, und das erste Beispiel einer wirklichen Quadratur von krummlinig begrenzten Flächen, nämlich der sogenannten Lunulae des Hippokrates, von denen wir schon im § 9 gesprochen

haben. Hippokrates hoffte auf Grund dieser Resultate mit Hilfe von elementaren Konstruktionen zur Quadratur des Kreises zu gelangen, aber seine Versuche mußten sich notwendig als fruchtlos erweisen.

Dinostratos zeigte, daß man zur Rektifikation und Quadratur des Kreises eine schon von Hippias von Elea (um 450 v. Chr.) konstruierte und für die Dreiteilung des Winkels verwandte Kurve benutzen könnte. Es ist dies die im § 11 des VII. Artikels vorgeführte transzendente Kurve, die eben darum den Namen *τετραγωνίζουσα* oder Quadratrix führt. Die an jener Stelle entwickelte Gleichung dieser Kurve lautet in rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)},$$

und daraus ergibt sich, daß der Punkt, in dem sie die $x$-Achse schneidet, die Abszisse $\frac{2}{\pi}$ hat. Ist also diese Kurve gezeichnet und der genannte Punkt konstruiert, so kann man allein mit Geraden und Kreisen den Kreis rektifizieren; aber diese Kurve läßt sich nur punktweise konstruieren und kann also nur eine annähernde Lösung der Aufgabe ergeben.

Bei weitem wichtigere Resultate sind diejenigen, die man Archimedes verdankt, der in seiner Schrift *κύκλου μέτρησις* die Gleichwertigkeit der beiden Probleme der Quadratur und der Rektifikation des Kreises nachwies und mit wissenschaftlicher Strenge die bekannte Methode der einbeschriebenen und umbeschriebenen Polygone auseinandersetzte. Er wandte diese Methode auf die annähernde Rektifikation des Kreises an: indem er von dem einbeschriebenen und dem umbeschriebenen regulären Sechseck ausging, berechnete er der Reihe nach die Umfänge der Polygone, die man durch Verdoppelung der Seitenzahl erhält, und indem er dabei bis zum Polygon von $6 \cdot 2^4 = 96$ Seiten ging, fand er für das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser die Grenzen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$, von denen die zweite, die um weniger als $\frac{2}{1000}$ größer ist als der wirkliche Wert, noch gegenwärtig wegen ihrer großen Einfachheit in der Praxis oft gebraucht wird.

Das Problem, den Kreis mit beliebiger Genauigkeit annähernd zu quadrieren, konnte als durch die Archimedische Methode vollständig gelöst betrachtet werden, und diese Methode blieb trotz der Länge der bei ihr zur Erreichung einer leidlich genauen Lösung nötigen Rechnungen fast ohne irgend welche Änderung einen langen Zeitraum hindurch im Gebrauch, nämlich bis sie von Snellius und Huygens zu demjenigen Grad von Vollkommenheit und Einfach-

heit gebracht wurde, der sich mit elementaren Mitteln noch erreichen ließ. Unter den vielen Mathematikern, die in diesem Zeitraume sich mit der annähernden Berechnung des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Radius beschäftigten, ist derjenige, der einen Wert fand, der dem wahren weit näher als die früher gefundenen kommt, der holländische Mathematiker Adrian Mez gewesen; er gab für $\pi$ den Wert $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ an, der sich von dem wahren erst von der siebenten Dezimalen an unterscheidet und von besonderem Interesse darum ist, weil er einen Näherungsbruch bei der Entwicklung von $\pi$ in einen Kettenbruch darstellt. Darauf gab der französische Mathematiker François Vieta (1540—1603), immer nach der Archimedischen Methode, indem er in der Rechnung bis zum Polygone von $6 \cdot 2^{16}$ Seiten ging, den Wert von $\pi$ auf neun genaue Dezimalstellen an; diese Annäherung wurde später durch den Holländer Adrian Romanus (gest. 1616) übertroffen, der bis zum Polygone von $2^{30}$ Seiten kam und $\pi$ auf fünfzehn Dezimalstellen berechnete, und endlich durch Ludolph van Ceulen (1539—1610), der mit bewundernswürdiger Geduld und Ausdauer die Rechnung bis auf 35 genaue Dezimalen fortführte.

Weit über alle diese Untersuchungen erhoben sich durch ihre Originalität und ihren wissenschaftlichen Wert die klassischen Arbeiten der beiden großen holländischen Mathematiker und Physiker Snellius (1580—1626) und Huygens (1629—1695). Besonders ging aus Huygens' Abhandlung De circuli magnitudine inventa hervor, daß man durch den Vergleich der Flächen und Umfänge zweier regulärer Polygone, von denen das eine dem Kreise einbeschrieben, das andere ihm umbeschrieben ist, zu zwei viel engeren Grenzen für das Verhältnis $\pi$ als durch das gewöhnliche Archimedische Verfahren gelangen kann, und daher wurde die Berechnung von $\pi$ sehr vereinfacht. So erhielt z. B. Huygens bei Benutzung des regulären Sechzigecks einen auf neun Dezimalstellen genauen Wert von $\pi$, während nach der Archimedischen Methode das Sechsundneunzigeck nötig ist, um zwei Dezimalen zu erhalten.

Zweite Periode. In die zweite Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts fallen die ersten Anfänge der modernen Analysis, hauptsächlich auf Grund der Arbeiten von Newton, Leibniz und der Gebrüder Bernoulli. Neue Anschauungen und neue Methoden treten an Stelle der alten, und die großen Entdeckungen, an denen sie reich sind, ändern von Grund aus den Bau der mathematischen Wissenschaften. Im besondern verläßt man in der Theorie der Kreismessung

die geometrischen Methoden des Archimedes und des Huygens und wendet sich Untersuchungen von einem durchaus verschiedenen Charakter zu, die nämlich zum Ziele haben, für das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser analytische Darstellungen, die eine unendliche Zahl von Operationen enthalten, zu finden.

Entsprechend dieser neuen Forschungsrichtung gab Wallis (1616—1703) für $\pi$ die folgende Entwicklung in ein unendliches Produkt an:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

und ferner lieferte er einen strengen Beweis für die Entwicklung von $\pi$ in einen Kettenbruch:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}$$

die von Brouncker (1620—1684) ohne einen Beweis ausgesprochen worden war.

Für die in dieser Zeit gefundenen Entwicklungen der Zahl $\pi$ in eine unendliche Reihe bildet den Ausgangspunkt die folgende Entwicklung von arc tg $x$, zu der man leicht durch Anwendung der bekannten Mac Laurinschen Formel gelangen kann und die zuerst von Gregory (1670) und dann unabhängig davon von Leibniz gefunden worden ist:

$$\text{arc tg}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

Setzt man in ihr $x=1$, so erhält man die sogenannte Leibnizsche Reihe:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

Aber diese Reihe ist ebenso wie die obigen Entwicklungen in ein unendliches Produkt und einen Kettenbruch von langsamer Konvergenz.

Viele andere für die Berechnung von $\pi$ geeignetere Entwicklungen sind aus der Reihe abgeleitet worden, die sich aus arc tg $x$ ergibt, wenn man die Relation

$$\text{arc tg}\, x+\text{arc tg}\, y=\text{arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

und andere, die daraus folgen, berücksichtigt. Von allen diesen führen wir diejenige an, die für die Berechnung von $\pi$ am geeignetsten

ist, nämlich die von dem englischen Mathematiker Machin (1680—1752) angegebene Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots\right)$$

Mit Hilfe dieser und ähnlicher Reihen wurde $\pi$ auf mehr als hundert Dezimalstellen berechnet.

Wenn nun auch alle diese Arbeiten an und für sich von großer wissenschaftlicher Bedeutung sind, so enthüllen sie doch nichts über die Natur der Zahl $\pi$, und in der Periode, mit der wir uns beschäftigen, wußte man auch noch nicht, ob diese Zahl rational oder irrational ist; daher blieb auch die Frage, ob die Quadratur des Kreises mit Hilfe von Geraden und Kreisen möglich ist, ungelöst, ja sie war nicht einmal in genügend scharfer Form gestellt worden, um in entscheidender Weise beantwortet werden zu können.

Der Schlüssel für die Lösung dieser Frage mußte durch Untersuchungen von wesentlich verschiedenem Charakter geliefert werden, deren Grundlagen von Euler in seinen Arbeiten über die trigonometrischen Funktionen und über die Exponentialfunktion $e^x$ gelegt wurden.

Der Engländer Napier (1614) war der erste, der die Zahl $e$ und die Exponentialfunktion $e^x$ betrachtete, da er die Zahl $e$ zur Basis eines Systems von Logarithmen, der sogenannten natürlichen oder Napierschen Logarithmen, gewählt hatte.

Euler (1707—1783), der die Methoden der Infinitesimalrechnung auf das Studium der Funktionen anwandte und die Variabilität der Größen auf komplexe Werte ausdehnte, entdeckte die innige Beziehung, die zwischen der Exponentialfunktion $e^x$ und den Kreisfunktionen $\sin x$, $\cos x, \cdots$ besteht. Indem er von den Entwicklungen der Ausdrücke $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ in Potenzreihen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

die nach der Mac Laurinschen Formel für reelle Werte der Variablen $x$ gelten, ausging und sich überzeugte, daß sie in der ganzen Ebene, d. h. für jeden, auch komplexen, Wert der Variablen konvergieren,

nahm er sie als Definitionen der entsprechenden Funktionen und leitete aus ihnen die Identität her:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

die eben die Abhängigkeit zwischen der Exponentialfunktion und den Kreisfunktionen darstellt. Wenn man in dieser Identität $x = \pi$ setzt, so erhält man die Relation

$$e^{i\pi} = -1,$$

auf die später (vgl. § 6) der Beweis der Transzendenz der Zahl $\pi$ und daher die Antwort auf die Frage nach der Quadratur des Kreises gegründet werden sollte.

Euler verdankt man außerdem zahllose Entwicklungen der Zahlen $e$ und $\pi$ in Reihen und Kettenbrüche, unter denen wir die folgende hervorheben wollen:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}};$$

sie sollte später Lambert zu dem Beweise dienen, daß die beiden Zahlen $e$ und $\pi$ irrational sind.

Dritte Periode. Nachdem Euler die innige Beziehung, die zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen, zwischen der Zahl $e$ und der Zahl $\pi$ besteht, entdeckt hatte, eröffneten sich für die Forschung neue Wege, um von der Natur dieser Zahlen Rechenschaft zu erhalten, da diese trotz aller Studien, denen die beiden Zahlen bisher unterworfen worden waren, ganz unbekannt geblieben war und man nun zu erkennen begann, daß in ihr sich der Schlüssel zu der Frage der Quadratur des Kreises befinden müsse. Die ersten Resultate von grundlegender Bedeutung in dieser Reihe von Untersuchungen verdankt man H. Lambert (1728—1777), der in seiner Abhandlung Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Zirkels suchen (1766) bewies, daß die beiden Zahlen $e$ und $\pi$ irrational sind. Indem er von der oben zitierten Eulerschen Entwicklung von $\frac{e-1}{2}$ in einen Kettenbruch ausging, leitete er die beiden folgenden Kettenbrüche ab:

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \cdots}}}},$$

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} - \cdots}}}}},$$

und auf Grund dieser Entwicklungen bewies er, wenn auch nicht ganz vollständig, die folgenden beiden Sätze:

1. Wenn $x$ eine von Null verschiedene rationale Zahl ist, so kann $e^x$ niemals eine rationale Zahl sein.

Für $x = 1$ ergibt sich als besonderer Fall die Irrationalität der Zahl $e$.

2. Wenn $x$ eine von Null verschiedene rationale Zahl ist, so kann $\operatorname{tg} x$ niemals eine rationale Zahl sein.

Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, und daher ergibt sich als besonderer Fall die Irrationalität der Zahl $\pi$.

Der Beweis dieser Sätze wurde später von A. M. Legendre (1752—1833), der nach derselben Methode bewies, daß auch das Quadrat von $\pi$ eine irrationale Zahl ist, vollständig und völlig streng geführt.

Späterhin (1840) bewies Liouville (1809—1882), daß die Zahl $e$ auch nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann.

Bei diesen Resultaten stellten sich unmittelbar die Fragen ein:

Von welchen algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten können die Zahlen $e$ und $\pi$ Wurzeln sein?

Könnten wir uns nicht zufällig Zahlen gegenüber befinden, die nicht Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung dieser Art sind?

Der in der letzten Frage enthaltene Zweifel wurde zunächst von Legendre ausdrücklich ausgesprochen und dann durch die Untersuchungen Liouvilles bestärkt, da diese zum ersten Male (1844) die Existenz nicht-algebraischer Zahlen nachwiesen und die Einteilung der Zahlen in algebraische und transzendente rechtfertigten (vgl. §§ 1, 2, 3).

Auf Grund einer sorgfältigen Untersuchung der Eigenschaften der Exponentialfunktion gelang es im Jahre 1873 Hermite, wie wir schon im § 4 gesagt haben, die Transzendenz der Zahl $e$ zu beweisen, und im Jahre 1882 bewies Lindemann, indem er sich auf die Hermiteschen Untersuchungen stützte und die Relation $e^{i\pi} = -1$, die

Eulersche Entdeckung, benutzte, daß auch $\pi$ eine transzendente Zahl ist, womit die Unmöglichkeit, den Kreis durch elementare Konstruktionen zu quadrieren (vgl. § 1), bewiesen war. Von den Vereinfachungen, die Weierstraß dem Lindemannschen Beweise zuteil werden ließ, haben wir bereits im § 4 gesprochen, und in den §§ 4, 5, 6 haben wir den von Weierstraß gegebenen Beweis des allgemeinen Lindemannschen Satzes dargelegt, durch den überdies die allgemeinere Frage der Rektifikation irgend eines Kreisbogens erledigt wird.

Durch neuere Untersuchungen wurde der Beweis der Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$ noch erheblich vereinfacht: wir denken an die nacheinander von Hilbert, Hurwitz und Gordan gegebenen Beweise, die im 43. Bande der Mathematischen Annalen (1893) zusammengestellt sind.

Hilbert macht die Annahme, daß die Zahl $e$ die algebraische Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$(1) \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0$$

befriedige, multipliziert diese Gleichung mit dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty z^\varrho \{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\}^{\varrho+1} e^{-z} dz \qquad (\varrho \text{ ganz und positiv})$$

und zerlegt dann die linke Seite in die beiden Teile

$$P_1 = a\int_0^\infty + a_1 e\int_1^\infty + a_2 e^2\int_2^\infty + \cdots + a_n e^n \int_n^\infty$$

$$P_2 = a_1 e\int_0^1 + a_2 e^2 \int_0^2 + \cdots + a_n e^n \int_0^n,$$

so daß, wenn man die Gleichung durch $\varrho!$ dividiert, sich ergeben würde:

$$(2) \qquad \frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0.$$

Nun beweist Hilbert mit Hilfe der Identität

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z} dz = \varrho!,$$

daß für jeden Wert von $\varrho$ die Zahl $\frac{P_1}{\varrho!}$ immer ganz und von Null verschieden ist, während man $\varrho$ so wählen kann, daß $\frac{P_2}{\varrho!}$ dem absoluten

Werte nach kleiner als 1 ist. Also ist die Gleichung (2) und daher auch die Gleichung (1) unmöglich, und damit ist die Transzendenz der Zahl $e$ bewiesen.

Um von $e$ zu $\pi$ überzugehen, benutzt man die Eulersche Relation $e^{i\pi} = -1$. Nimmt man an, daß $\alpha_1 = i\pi$ Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten ist, die noch die anderen Wurzeln $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ hat, so müßte das Produkt

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_n}$$

Null sein; dies ist aber, wie Hilbert beweist, indem er ein analoges Verfahren wie bei der Zahl $e$ anwendet, unmöglich.

Hurwitz zeigte, wie man bei dem Beweise der Transzendenz von $e$ die Betrachtung des Integrals

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z} dz$$

vermeiden kann.

Er geht von dem Mittelwertsatze aus:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x \cdot \varphi'(\vartheta x) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

und wendet diese Formel auf die Funktion

$$e^{-x} F(x) = \{f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(\nu)}(x)\}\, e^{-x}$$

an, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion $\nu^{\text{ten}}$ Grades von der Form

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)\}^p$$

und $p$ eine Primzahl ist. So findet er

$$F(x) - e^x F(0) = -x \cdot e^{(1-\vartheta)x} \cdot f(\vartheta x).$$

Und indem er in dieser Formel der Reihe nach

$$x = 1, 2, \cdots, n$$

setzt, leitet er die Relationen ab

$$\begin{cases} F(1) - e\, F(0) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2 F(0) = \varepsilon_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F(n) - e^n F(0) = \varepsilon_n, \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ Größen sind, die bei wachsendem $p$ sich der Null nähern, während $F(1), F(2), \ldots, F(n)$ immer ganze und durch $p$ teilbare Zahlen sind und $F(0)$ eine nicht durch $p$ teilbare ganze Zahl ist.

Macht man nun die Annahme, daß $e$ die algebraische Gleichung mit ganzen Koeffizienten

$$C_0 + C_1 e + \cdots + C_n e^n = 0$$

erfüllt, so würde mit Hilfe der vorstehenden Relationen folgen, daß der Ausdruck

$$C_0 F(0) + C_1 F(1) + C_2 F(2) + \cdots + C_n F(n)$$

für einen geeigneten Wert von $p$ identisch Null wird, was aber unmöglich ist, da er eine ganze, durch $p$ nicht teilbare Zahl darstellt.

Endlich gelang es Gordan, die Transzendenz von $e$ und $\pi$ zu beweisen, indem er der Funktionentheorie nur die Reihenentwicklung von $e^x$ und den Begriff der Ableitung einer ganzen rationalen Funktion entnahm. Der Gordansche Beweis wurde dann in einfacherer und durchsichtigerer Weise von H. Weber in seinem „Lehrbuch der Algebra“[1]) auseinandergesetzt und später noch elementarer in der „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik“.[2]) Wir wollen damit schließen, daß wir diesen Beweis wiedergeben, der nun so einfach geworden ist, daß er sozusagen jedermann zugänglich ist.

**§ 11. Beweis der Transzendenz von $e$ und $\pi$ nach der neuesten Darlegung von H. Weber.** Wir gehen von der Reihenentwicklung von $e^x$ aus:

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

die für jeden, reellen oder komplexen, Wert von $x$ gültig ist. Wir bezeichnen mit $n$ irgend eine positive ganze Zahl und multiplizieren die vorstehende Gleichung mit $n!$. Dadurch erhalten wir

$$(2) \qquad n!e^x = n! + \frac{n!}{1!}x + \frac{n!}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + U_n,$$

wenn

$$(3) \qquad U_n = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

gesetzt wird.

Nun bemerken wir, daß, wenn $s$ eine positive ganze Zahl, die nicht größer als $n$ ist, bezeichnet, die $s^{\text{te}}$ Ableitung von $x^n$, die wir

1) 2. Aufl., Braunschweig 1899, Bd. II, Abschn. 25.

2) H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik Bd. I, Leipzig 1903, pg. 418—432.

mit $D_s x^n$ bezeichnen können, gleich $\frac{n!}{(n-s)!}\cdot x^{n-s}$ ist, während für $s$ größer als $n$ $D_s x^n = 0$ ist.

Wenn wir daher in (2) für $n$ der Reihe nach die Werte $n-1$, $n-2, \cdots, 2, 1$ setzen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} n!\, e^x = U_n + \sum_1^n {}_s\, D_s x^n, \\ (n-1)!\, e^x = U_{n-1} + \sum_1^n {}_s\, D_s x^{n-1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2!\, e^x = U_2 + \sum_1^n {}_s\, D_s x^2, \\ 1!\, e^x = U_1 + \sum_1^n {}_s\, D_s x. \end{cases}$$

Nun betrachten wir eine ganze rationale Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades $f(x)$ von der Beschaffenheit, daß $f(0) = 0$ ist; sie kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$(5)\qquad f(x) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x.$$

Wir bezeichnen mit $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ ihre ersten $n$ Ableitungen und setzen

$$(6)\qquad F(x) = f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x).$$

Dann ist offenbar

$$(7)\qquad F(0) = \gamma_n n! + \gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$$

Wir multiplizieren nun die Gleichungen (4) der Reihe nach mit $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \cdots, \gamma_2, \gamma_1$ und addieren. Setzen wir

$$(8)\qquad U(x) = \gamma_n U_n + \gamma_{n-1} U_{n-1} + \cdots + \gamma_1 U_1$$

und berücksichtigen wir die Gleichungen (4), (5), (6), (7), so erhalten wir

$$(9)\qquad F(0)\cdot e^x = F(x) + U(x).$$

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für den Beweis der Transzendenz von $e$ und $\pi$. Hinsichtlich der Funktion $U(x)$ ist nur eine gewisse obere Grenze ihres absoluten Wertes festzustellen.

Wir bezeichnen dazu mit $r$ den absoluten Wert von $x$; dann er-

halten wir aus (3) für den absoluten Wert von $U_n$ die folgende Ungleichheit:

$$|U_n| < r^n \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right),$$

d. h.

$$|U_n| < r^n e^r.$$

Berücksichtigen wir nun den Ausdruck (8) von $U(x)$ und bezeichnen wir mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1$ die absoluten Werte von $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_2, \gamma_1$, so erhalten wir

$$|U(x)| < (c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r) \cdot e^r$$

oder

(10) $$|U(x)| < \varphi(r) \cdot e^r,$$

wenn $\varphi(r)$ den Ausdruck $c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r$ bezeichnet, d. h. das, was aus $f(x)$ wird, wenn man für $x, \gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1$ ihre absoluten Werte $r, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1$ einsetzt.

Transzendenz von $e$. Wir nehmen an, daß die Zahl $e$ algebraisch, d. h. Wurzel einer algebraischen Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten:

(11) $$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_m e^m = 0$$

ist, wo die Koeffizienten $C_0$ und $C_m$ immer als von Null verschieden vorausgesetzt werden können.

Wir setzen dann in (9) für $x$ der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, m$, multiplizieren mit $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$ und addieren; dadurch erhalten wir auf Grund von (11)

(12) $$\sum_0^m {}_\nu C_\nu F(\nu) + \sum_0^m {}_\nu C_\nu U(\nu) = 0.$$

Nun wollen wir beweisen, daß, wenn wir die ganze Funktion $f(x)$, die bis auf die Bedingung $f(0) = 0$ ganz willkürlich ist, geeignet wählen, die Gleichung (12) unmöglich ist; daraus ergibt sich dann, daß eine Gleichung wie (11) nicht existieren kann und also die Zahl $e$ transzendent ist.

Wir wählen eine Primzahl $p$ größer als $m$ und nehmen für $f(x)$ die ganze Funktion

(13) $$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-m)^p}{(p-1)!},$$

die für $x = 0$ Null wird und vom Grade

$$n = (m+1)p - 1$$

ist.

Die Unmöglichkeit der Gleichung (12) wird offenbar sein, wenn wir bewiesen haben, daß bei geeigneter Wahl der Primzahl $p$:

1. die Summe $\sum_{0}^{m}{}_{\nu} C_\nu F(\nu)$ eine von Null verschiedene ganze Zahl und darum in ihrem absoluten Werte nicht kleiner als 1 ist,

2. die Summe $\sum_{0}^{m}{}_{\nu} C_\nu U(\nu)$ in ihrem absoluten Werte kleiner als 1 ist.

Wenn wir $f(x)$ nach wachsenden Potenzen von $x$ ordnen, so erhalten wir

$$(14)\qquad f(x) = \frac{A_{p-1}\,x^{p-1} + A_p\,x^p + A_{p+1}\,x^{p+1} + \cdots + A_n\,x^n}{(p-1)!},$$

wo die Koeffizienten $A_{p-1}, A_p, A_{p+1}, \cdots$ ganze Zahlen sind. Es ist $A_{p-1} = \pm (m!)^p$, also, da $p$ eine Primzahl größer als $m$ ist, durch $p$ nicht teilbar.

Bilden wir die ersten $n$ Ableitungen von $f(x)$ und setzen wir in ihnen $x = 0$, so erhalten wir

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \cdots, f^{(p-2)}(0) = 0,$$
$$f^{(p-1)}(0) = A_{p-1}, \quad f^{(p)}(0) = p\cdot A_p, \quad f^{(p+1)}(0) = p\,(p+1)A_{p+1}, \cdots,$$
$$f^{(n)}(0) = p(p+1)\cdots n\cdot A_n.$$

Daher ist nach (6)

$$F(0) = A_{p-1} + pA_p + p\,(p+1)A_{p+1} + \cdots.$$

Also ist $F(0)$ eine durch $p$ nicht teilbare ganze Zahl, und wenn wir für $p$ eine so große Primzahl wählen, daß die (von Null verschiedene) Zahl $C_0$ durch $p$ nicht teilbar ist, so ist auch $C_0F(0)$ eine durch $p$ nicht teilbare ganze Zahl.

Ordnen wir nun $f(x)$ nach wachsenden Potenzen von $(x-\nu)$, wo $\nu$ eine der ganzen Zahlen 1, 2, . . ., $m$ bedeutet, so erhalten wir

$$f(x) = \frac{B_p(x-\nu)^p + B_{p+1}\,(x-\nu)^{p+1} + \cdots + B_n\,(x-\nu)^n}{(p-1)!},$$

wo die Koeffizienten $B_p, B_{p+1}, \cdots$ ganze Zahlen sind. Bilden wir der Reihe nach die Ableitungen und setzen wir $x = \nu$, so erhalten wir

$$f(\nu) = 0, \quad f'(\nu) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(\nu) = 0,$$
$$f^{(p)}(\nu) = p\cdot B_p, \quad f^{(p+1)}(\nu) = p(p+1)B_{p+1}, \cdots,$$
$$f^{(n)}(\nu) = p\cdot(p+1)\cdots nB_n.$$

Daher ist nach (6)

$$F(\nu) = pB_p + p(p+1)B_{p+1} + \cdots$$

Also sind $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ durch $p$ teilbare ganze Zahlen.

Die Summe $\sum_0^m C_\nu F(\nu)$ ist demnach eine durch $p$ nicht teilbare ganze Zahl und also in ihrem absoluten Werte nicht kleiner als 1.

So ist der erste Teil des Beweises erbracht.

Wir gehen nun an den zweiten Teil. Wir bedienen uns dabei der Ungleichheit (10). Wir bezeichnen wiederum mit $r$ den absoluten Wert von $x$ und bemerken zunächst, daß der Ausdruck, den man aus der Funktion $f(x)$ erhält, wenn man für $x$ und die Koeffizienten ihre absoluten Werte setzt, ist:

$$\varphi(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p(r+2)^p \cdots (r+m)^p}{(p-1)!}.$$

Aber nach (10) ist

$$|U(x)| < \varphi(r) \cdot e^r.$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m) = \varrho_\nu,$$

so ist

$$|U(\nu)| < \frac{\varrho_\nu^{\,p}}{\nu \cdot (p-1)!} \cdot e^\nu$$

oder

$$|U(\nu)| < \frac{\varrho_\nu e^\nu}{\nu} \cdot \frac{\varrho_\nu^{\,p-1}}{(p-1)!}.$$

Aber da die Reihe (1) für jeden Wert von $x$ konvergent ist, so hat ihr allgemeines Glied $\frac{x^n}{n!}$ bei unbegrenzt wachsendem $n$ zur Grenze Null. Daher kann man die Primzahl $p$ so groß wählen, daß $\frac{\varrho_\nu^{\,p-1}}{(p-1)!}$ und daher auch $|U(\nu)|$ beliebig klein ist. Darum kann man auch die Summe $\sum_0^m C_\nu U(\nu)$ in ihrem absoluten Werte beliebig klein machen und im besondern kleiner als 1.

Also ist die Zahl $e$ transzendent.

Transzendenz von $\pi$.

Der Beweis der Transzendenz von $\pi$ gründet sich ebenfalls auf die beiden Relationen (9) und (10) und auf die Relation

(15) $$1 + e^{i\pi} = 0,$$

die die beiden Zahlen $e$ und $\pi$ miteinander verbindet.

Nimmt man an, daß $\pi$ eine algebraische Zahl ist, so ist auch $i\pi$ eine algebraische Zahl und daher Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$\psi(x) = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Wenn $\nu$ der Grad von $\psi$ ist, so bezeichnen wir mit $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ alle Wurzeln dieser Gleichung, unter denen sich also auch $i\pi$ befindet. Wir erhalten daher auf Grund von (15)

$$(1 + e^{y_1})(1 + e^{y_2}) \cdots (1 + e^{y_\nu}) = 0$$

und, wenn wir die Multiplikation ausführen:

$$(16) \qquad 1 + \sum e^{y_i} + \sum e^{y_i + y_k} + \sum e^{y_i + y_k + y_l} + \cdots = 0.$$

Die $\frac{\nu(\nu - 1)}{2}$ Summen $y_i + y_k$ sind Wurzeln einer zweiten algebraischen Gleichung

$$\psi_1(x) = 0,$$

da jede symmetrische Funktion von ihnen auch eine symmetrische Funktion der $y_i$ und daher eine rationale Zahl ist. Ebenso beweist man, daß die $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2 \cdot 3}$ Summen $y_i + y_k + y_l$ Wurzeln einer dritten algebraischen Gleichung $\psi_2(x) = 0$ sind, usw.

Also ist

$$(17) \qquad \psi(x) \cdot \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \cdots$$

eine ganze Funktion, die gleich Null wird, sobald $x$ gleich einer der Zahlen

$$(18) \qquad y_i, \quad y_i + y_k, \quad y_i + y_k + y_l, \ldots$$

ist. Von diesen Zahlen können einige Null sein. Bezeichnen wir mit $C - 1$ die Zahl derjenigen, die gleich Null sind, so ist $C$ eine positive ganze Zahl $\geq 1$. Setzen wir das Produkt (17) gleich Null und unterdrücken wir den Faktor $x^{C-1}$, so erhalten wir eine Gleichung $\chi(x) = 0$, die wir immer auf ganze Koeffizienten gebracht denken können. Ihre Wurzeln

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

sind diejenigen unter den Zahlen (18), die von Null verschieden sind, und genügen infolge von (16) der Gleichung

$$(19) \qquad C + e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_m} = 0.$$

Es ist klar, daß $\chi(0)$ von Null verschieden ist und daß $\chi(x)$ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\chi(x) = a x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m,$$

wo $a, a_1, \ldots, a_m$ ganze rationale Zahlen sind und $a$ und $a_m$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden können und überdies $a$ positiv.

Multiplizieren wir nun $\chi(x)$ mit $a^{m-1}$ und setzen wir

$$ax = z, \; a^{m-1}\chi(x) = \vartheta(z); \; ax_1 = z_1, \; ax_2 = z_2, \ldots, ax_m = z_m,$$

so sind $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die Wurzeln der Gleichung mit ganzen Koeffizienten:

(20) $$\vartheta(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \cdots + b_m = 0.$$

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir die fundamentale Gleichung (9) an.

Setzen wir in ihr der Reihe nach für $x$ die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, summieren wir dann und fügen wir auf beiden Seiten $C \cdot F(0)$ hinzu, so erhalten wir infolge von (19)

(21) $$C \cdot F(0) + \sum_1^m {}_\nu F(x_\nu) + \sum_1^m {}_\nu U(x_\nu) = 0.$$

Nun wollen wir beweisen, daß, wenn wir die ganze Funktion $f(x)$, die, abgesehen von der Bedingung $f(0) = 0$, ganz willkürlich ist, geeignet wählen, die Gleichung (21) unmöglich ist; damit wird bewiesen sein, daß $\pi$ keine algebraische Zahl sein kann.

Wir bezeichnen mit $p$ eine Primzahl und nehmen für $f(x)$ die ganze Funktion

(22) $$f(x) = \frac{z^{p-1}(\vartheta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{mp-1}x^{p-1}(\chi(x))^p}{(p-1)!},$$

die für $x = 0$ Null wird und vom Grade

$$n = (m+1)p - 1$$

ist.

Die Unmöglichkeit der Gleichung (21) wird offenbar sein, wenn wir bewiesen haben, daß bei geeigneter Wahl der Primzahl $p$

1. die Summe $C \cdot F(0) + \sum_1^m {}_\nu F(x_\nu)$ eine ganze, von Null verschiedene Zahl ist;

2. die Summe $\sum_1^m {}_\nu U(x_\nu)$ in ihrem absoluten Werte kleiner als 1 ist.

Ordnen wir nach wachsenden Potenzen von $z$, so erhalten wir

$$(\vartheta(z))^p = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$
$$= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \cdots$ ganze Zahlen sind; es ist $A_0 = b_m{}^p$ und daher von Null verschieden.

Wir haben ferner

$$f(x) = \frac{A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \cdots}{(p-1)!}.$$

Bilden wir die Ableitungen und setzen wir $x = 0$, so erhalten wir:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0, \ldots, f^{(p-2)}(0) = 0;$$
$$f^{(p-1)}(0) = A_0 a^{p-1} = b_m{}^p a^{p-1},\ f^{(p)}(0) = p \cdot A_1 a^p,$$
$$f^{(p+1)}(0) = p \cdot (p+1) \cdot A_2 a^{p+1}, \cdots$$

Wir wählen die Primzahl $p$ größer als die größte der Zahlen $a, b_m, C$. Dann ist $f^{(p-1)}(0)$ durch $p$ nicht teilbar, während alle anderen $f^{(\mu)}(0)$ entweder Null oder durch $p$ teilbar sind; und es ist daher $F(0) = \sum_1^n{}_\nu f^{(\nu)}(0)$ eine ganze, durch $p$ nicht teilbare Zahl, und also auch $C \cdot F(0)$ eine ganze durch $p$ nicht teilbare Zahl.

Ordnen wir nun nach wachsenden Potenzen von $z - z_\nu$, so erhalten wir:

$$f(x) = \frac{(z - z_\nu)^p B_1(z_\nu) + (z - z_\nu)^{p+1} B_2(z_\nu) + \cdots}{(p-1)!}$$
$$= \frac{a^p (x - x_\nu)^p B_1(z_\nu) + a^{p+1}(x - x_\nu)^{p+1} B_2(z_\nu) + \cdots}{(p-1)!},$$

wo $B_1(z_\nu), B_2(z_\nu), \cdots$ ganze Funktionen von $z_\nu$ mit ganzen Koeffizienten sind.

Es folgt dann, wie vorher:

$$f'(x_\nu) = 0,\ f''(x_\nu) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(x_\nu) = 0;$$
$$f^{(p)}(x_\nu) = p a^p B_1(z_\nu),\ f^{p+1)}(x_\nu) = p(p+1) a^{p+1} B_2(z_\nu), \ldots,$$

und, wenn wir

$$Q(z_\nu) = a^p B_1(z_\nu) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_\nu) + \cdots$$

setzen, so erhalten wir infolge von (6)

$$F(x_\nu) = p \cdot Q(z_\nu)$$

und daher

$$\sum_1^m{}_\nu F(x_\nu) = p \sum_1^m Q(z_\nu).$$

Aber $\sum_1^m{}_\nu Q(z_\nu)$ ist eine ganze symmetrische Funktion der $m$ Wur-

zeln der Gleichung (20) und daher eine ganze Zahl, und also ist die Summe $\sum_1^m {}_\nu F(x_\nu)$ eine ganze, durch $p$ teilbare Zahl.

Daraus folgt schließlich, daß $C \cdot F(0) + \sum_1^m {}_\nu F(x_\nu)$ eine ganze, durch $p$ nicht teilbare Zahl und also von Null verschieden ist.

Damit ist der erste Teil unseres Beweises erbracht.

Gehen wir nun zu dem zweiten Teile. Dazu machen wir Gebrauch von der Ungleichheit (10).

Wir können schreiben:

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

und infolge von (22) erhalten wir

$$f(x) = \frac{a^{(m+1)p-1} x^{p-1} (x - x_1)^p (x - x_2)^p \cdots (x - x_m)^p}{(p-1)!},$$

Wir bezeichnen mit $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$ die absoluten Werte von $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$ und erinnern uns, daß $a$ positiv ist. Dann ist klar, daß die Koeffizienten von $f(x)$ nicht größer sind als die Koeffizienten der Funktion

$$\frac{a^{(m+1)p-1} x^{p-1} (x + r_1)^p (x + r_2)^p \cdots (x + r_m)^p}{(p-1)!}.$$

Wenn wir also

$$\varrho(r) = a^{m+1} r (r + r_1)(r + r_2) \cdots (r + r_m)$$

setzen, so ist für jede positive Zahl $r$

$$\varphi(r) < \frac{(\varrho(r))^p}{ar(p-1)!}$$

oder

$$\varphi(r) < \frac{\varrho(r)}{ar} \cdot \frac{(\varrho(r))^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Wählen wir also $p$ genügend groß, so kann $\varphi(r)$ und infolge von (10) auch $|U(x_\nu)|$ beliebig klein gemacht werden und darum kann auch die Summe $\sum_1^m {}_\nu U(x_\nu)$ in ihrem absoluten Werte beliebig klein gemacht werden und im besonderen auch $< 1$.

Daher ist die Zahl $\pi$ transzendent.

bis zu ihnen zurückgelegt hat, und es bleibt ihnen ihre innigere Berührung mit der Form, in der die praktischen Aufgaben gewöhnlich auftreten. Daher wollen wir von dem, was die alten Geometer uns gelehrt haben, nichts beiseite legen und wenden uns an eine breitere und höhere wissenschaftliche Ausbildung nur, um uns die Verhältnisse jener elementaren Geometrie klar zu machen, deren bewundernswerte Einzelheiten sehr wohl dem Glanze der modernen allgemeinen Begriffe entsprechen.

---

## Berichtigungen.

S. 42, Z. 21 v. o. statt anM lies Man
S. 98, Z. 16 v. u. statt ; lies :
S. 112, Z. 3 v. u. und S. 113, Z. 3 v. o. statt $\frac{O}{O}\frac{M}{E}$ lies $\frac{OM}{OE}$
S. 113, Z. 11 v. o. statt $\frac{X'}{O'}\frac{E'}{E'}$ lies $\frac{X'E'}{O'E'}$
S. 117, Z. 15 v. o. statt $\frac{O'}{O'}\frac{M_x}{E_x}$ lies $\frac{OM_x}{OE_x}$
S. 120, Z. 1 v. u. statt Beziehnng lies Beziehung
S. 140, Z. 3 v. o. statt im § 9 lies in den §§ 8—10
S. 181, Z. 5 v. u. statt mit der Abszisse lies von der Abszisse
S. 270, Z. 8 v. u. statt arithmetich lies arithmetisch
S. 308, Z. 14 v. o. statt algebraischen lies algebraischer
S. 319, Z. 11 v. u. statt $\gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$ lies $\gamma_{n-1}(n-1)! + \cdots + \gamma_1 1!$

---

